SEMINARIO 2007
SISTEMAS DE CONTROL

Espacio de Estado y Control Moderno

1. Introducción

La teoría moderna de control está basada en el conocimiento del comportamiento interno del sistema, reflejado en las variables que influyen en su dinámica. Estas variables constituyen el concepto de "estado del sistema", que establecen la piedra angular de dicha teoría. La teoría moderna de control se desarrolla para solventar algunos de los problemas en los que presenta fuertes limitaciones la denominada "teoría clásica", basada en el modelado de la relación entre una entrada y una salida de los sistemas lineales, continuos e invariantes. Las ventajas de la teoría moderna de control en contraposición a la teoría clásica, son fundamentalmente las siguientes:

- ***Es aplicable a sistemas multivariables en los que existe un elevado grado de interacción entre las variables del sistema, no pudiéndose establecer lazos de control entre una salida y una entrada concreta que se puedan ajustar en forma independiente, según se aborda en la teoría clásica.***

- ***Es aplicable a sistemas con relaciones no-lineales entre las variables involucradas en su dinámica y cuyo comportamiento no puede ser aproximado por un modelo lineal, dentro del rango de valores que van a tomar sus variables.***

- ***Es aplicable a sistemas cuyos parámetros varían en el tiempo a velocidades comparables con la evolución de sus variables, para los que no se puede obtener, en***

consecuencia, un modelo de parámetros constantes válido en el rango temporal necesario para efectuar el control.

- ***Es aplicable a sistemas complejos de control, con un gran número de variables internas que condicionan el comportamiento futuro de la salida. La utilización de la realimentación, solo, de la salida según el modelo clásico, empobrece la información disponible por el regulador para controlar la planta, lo que llega a impedir un control de la salida del sistema con mejores prestaciones.***

- ***Es aplicable a la optimización de sistemas, entendida ésta como la "minimización" de una función objetivo que describe un índice de costo, que a su vez refleja la calidad en la consecución de los objetivos del control.***

En el seminario (y curso de Sistemas de Control) veremos los sistemas continuos, lineales e invariantes en el tiempo (CLTI), para los cuales se simplifica mucho el análisis y el diseño de los reguladores multivariables.

2. Concepto de estado.

La "teoría moderna de control" se basa en la representación matemática de los sistemas dinámicos por medio del *concepto de estado*, en contraposición con la "teoría clásica de control", que utiliza únicamente la relación entre su entrada y su salida.

"Se define estado de un sistema, como la mínima cantidad de información necesaria en un instante, para que, conociendo la entrada a partir de ese instante, se pueda determinar cualquier variable del sistema en cualquier instante posterior".

Es común emplear la nomenclatura de "representación interna" cuando se utiliza el estado para representar el sistema y "representación externa" cuando se emplea la relación entrada-salida.

Ejemplo 1.
Considérese el depósito mostrado en la figura 1.

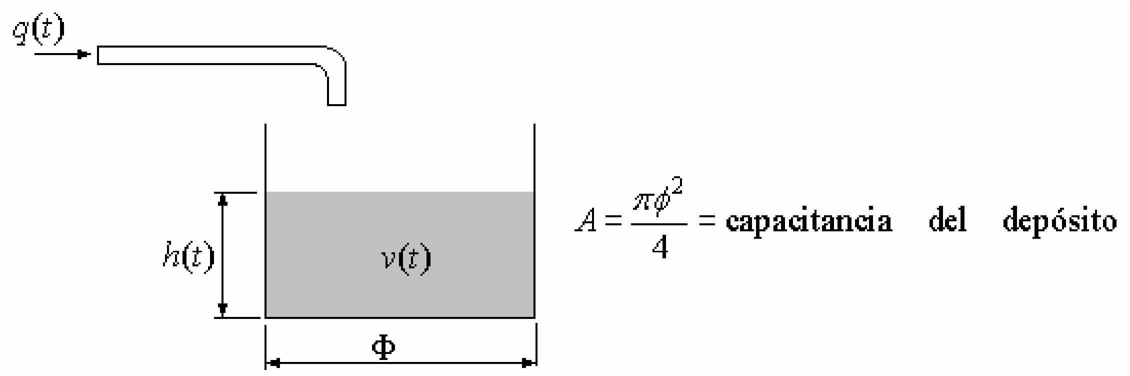


Fig. 1. Depósito

Por conservación de la masa en la unidad de tiempo (caudal), se tiene:

$$q(t)=\frac{dv(t)}{dt}=\dot{v}=A\frac{dh(t)}{dt} \qquad (1)$$

La evolución de la altura se puede calcular integrando la ecuación (1).

$$h(t)=\int_{-\infty}^{t}\frac{1}{A}\,q(\tau)\,d\tau \qquad (2)$$

Para determinar la altura en cualquier instante de tiempo, es necesario conocer la evolución del caudal desde el comienzo de los tiempos, lo que obliga evidentemente a un conocimiento de las condiciones que han actuado sobre el

sistema, lo cual normalmente está fuera de alcance. En la "teoría clásica" de control se realizaban algunas simplificaciones, como *considerar que las condiciones iniciales eran nulas.*
Una alternativa a estos planteamientos, sobre la que se basa la "teoría moderna de control", es considerar la información que resuma todo lo acontecido en el sistema hasta ese momento. *Esta información, que si es la mínima se denomina estado*, podría ser en el ejemplo presente, la altura en un determinado instante t_o : $h(t_o)$, así la evolución de la altura del depósito sería:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{A} q(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t_o} \frac{1}{A} q(\tau)d\tau + \int_{t_o}^{t} \frac{1}{A} q(\tau)d\tau$$

$$= h(t_o) + \int_{t_o}^{t} \frac{1}{A} q(\tau)d\tau$$

Éste resultado se puede expresar como:

$$h(t) = \psi\left(t, t_o, h(t_o), q(\tau)\right); \quad t_o < \tau \leq t \qquad (3)$$

En la relación (3) se aprecia que la altura en un determinado instante de tiempo solo depende del instante inicial y final, de la entrada aplicada entre ambos instantes y de la altura en el instante inicial (no influye la evolución hasta entonces, solo el valor en ese instante).
La altura del depósito representa el estado en el ejemplo 1 y debido a su sencillez, coincide con la salida del sistema, como se muestra en la figura 2.

Esta situación no es en absoluto generalizable a otros sistemas, en los cuales la salida y el estado no sólo no tienen porqué coincidir, sino que ni siquiera han de poseer la misma dimensión.

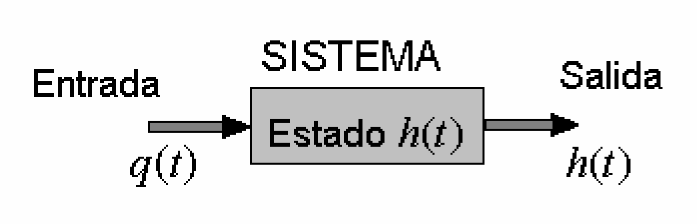


Fig. 2. Representación del sistema del ejemplo.

La cantidad mínima de información que define el estado, viene representada por un conjunto de variables $x_i(t)$ cuyos valores dependen del instante t considerado, denominadas *variables de estado del sistema*. Este conjunto de variables $\mathbf{x}(t)$, recibe el nombre de vector de estado. En la gran mayoría de los sistemas físicos reales se podrá obtener un modelo suficientemente aproximado donde el vector de estado sea de dimensión finita "n", y este será el único caso estudiado en el curso. Si además se representa el conjunto de variables de entrada, mediante el vector $\mathbf{u}(t)$, la definición anterior puede expresarse en forma matemática, como:

$$\mathbf{x}(t) = \psi\left(t, t_o, \mathbf{x}(t_o), \mathbf{u}(\tau)\right), \quad t_o < \tau \le t \qquad (4)$$

Si bien el modelo de estado tal como se formula es válido para establecer la representación de sistemas tanto lineales como no lineales, en el curso de "Sistemas de Control" nos centraremos en los sistemas lineales, invariantes y continuos (CLTI). El hecho que no profundicemos en los sistemas no-lineales se debe

fundamentalmente a la falta de generalidades en su tratamiento, es decir no existe un procedimiento universal para la solución de ecuaciones diferenciales no lineales (NLDE) , por lo cuál no se puede establecer una metodología genérica para su análisis.
Para avanzar en la introducción de los conceptos fundamentales de la teoría moderna de control, es que orientaremos el estudio hacia los sistemas lineales y continuos.

En principio para la formulación del modelo de estado se establecen 2(dos) hipótesis conocidas, que también aparecen en la teoría clásica de control.

a) El estudio se centra en *sistemas físicos, sistemas que por propia naturaleza, cumplen con el "principio de causalidad"*, por lo que siempre se parte del supuesto que se ha de cumplir con esta propiedad.

b) Dentro de los sistemas causales, centraremos el análisis en los sistemas *"deterministas"*, para los que dada una entrada se puede encontrar una salida de forma unívoca, en contraposición a los sistemas estocásticos. Para los cuales la salida frente a una dada entrada se modeliza como una cierta función de "densidad de probabilidad".

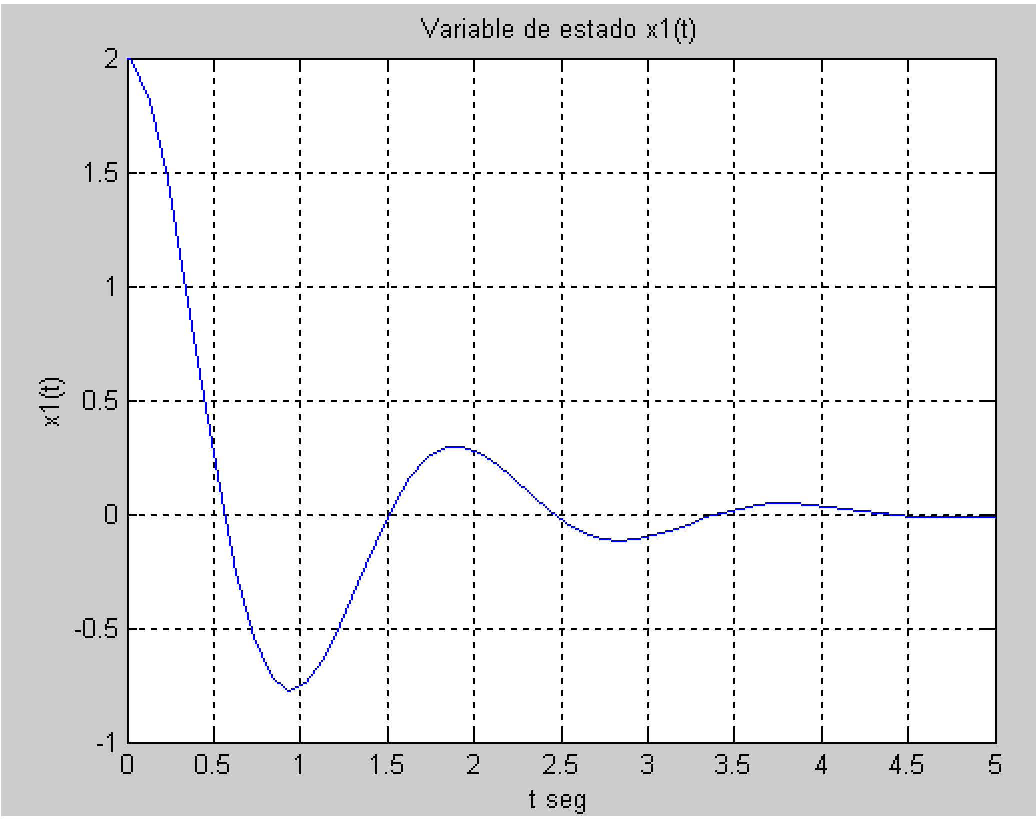
El vector de estado se define sobre el denominado espacio de estado.

Espacio de estado es el espacio vectorial en el cuál el vector de estado toma valores, teniendo por tanto la misma dimensión que el número de elementos de dicho vector.

Al ser el espacio de estado un espacio vectorial, admite infinitas bases, relacionadas entre sí mediante

transformaciones lineales. La representación del estado depende de la base elegida, por lo que existen infinitas posibilidades, relacionadas entre sí por transformaciones lineales. Esta dependencia no afecta a cualquier variable externa, como las entradas y las salidas, que no modifican su expresión sea cual sea la representación del estado elegida.

El valor del estado en distintos instantes varía en función de las condiciones iniciales con las que comienza a evolucionar el proceso, y de la entrada que recibe el sistema, según se refleja en la ecuación (4). El comportamiento descripto por esta ecuación se traduce en que cada una de las variables de estado modifica su valor a lo largo del tiempo, tal como se muestra en la figura 3 , para el caso de un modelo con dos variables de estado; la combinación de estas evoluciones por eliminación del tiempo entre todas ellas , se concreta en una " trayectoria de estado", que el vector de estado sigue dentro del espacio de estado como se muestra en la figura 4.



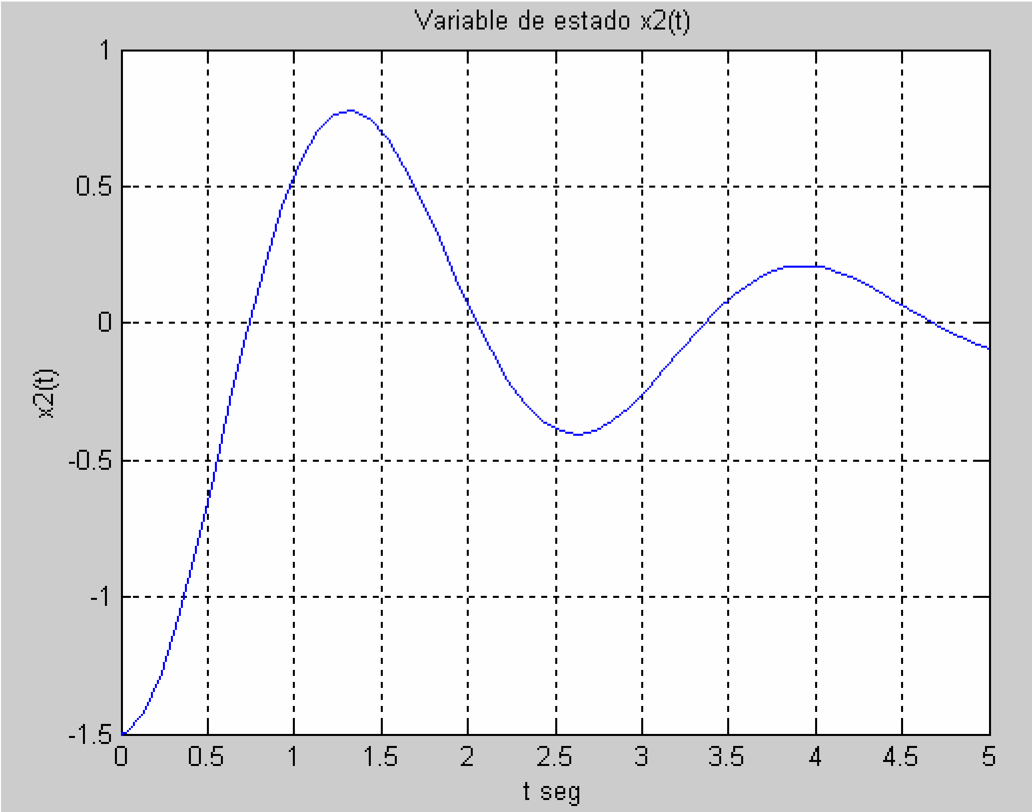


Fig. 3. Variables de estado $x_1(t)$ y $x_2(t)$.

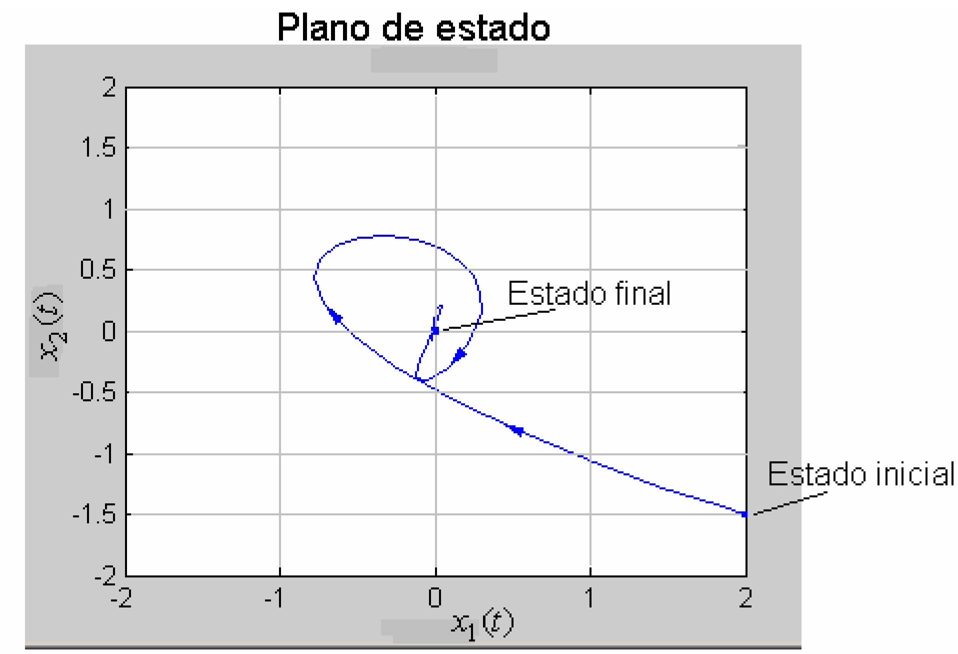


Fig. 4. Trayectoria en el plano de estado.

3. Propiedades de las variables de estado.

La trayectoria que describe el vector de estado de un sistema causal y determinista dentro del espacio de estado, están sujetas a las siguientes condiciones, ligadas a la definición de estado del sistema.

3.1 Unicidad.

Esta propiedad se expresa como:

$$\forall t \geq t_o, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(t_o), \quad \mathbf{u}(\tau), \quad t_o < \tau \leq t \Rightarrow \mathbf{x}(t)$$

es única

3.2. Continuidad.

Las trayectorias en el espacio de estado son funciones continuas. Es decir:

$$\lim_{t \to t_o} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t_o) \quad \forall t, t_o$$

3.3. Transitividad o propiedad de transición.

Si se considera en una trayectoria en el espacio de estado tres tiempos: $t_o,\ t_1$ y t_2 , tal como se muestra en la figura 5 , el valor del estado en estos tiempos está relacionado por esta propiedad de transición.

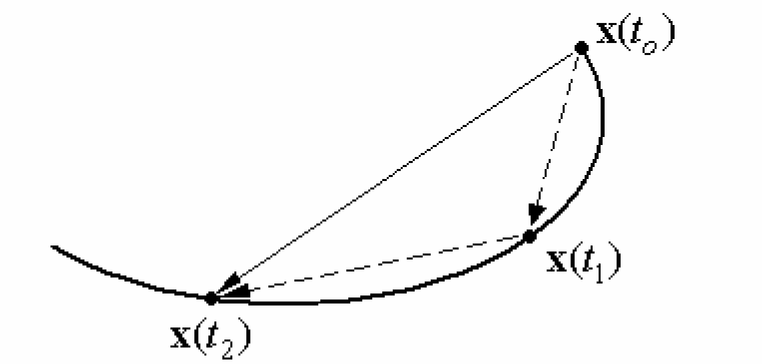


Fig.5. Transitividad de estado.

$$\mathbf{x}(t_2) = \boldsymbol{\psi}(t_2, t_o, \mathbf{x}(t_o), \mathbf{u}(\tau)) \quad con \quad t_o < \tau \le t_2$$

$$\mathbf{x}(t_2) = \boldsymbol{\psi}(t_2, t_1, \mathbf{x}(t_1), \mathbf{u}(\tau)) \quad con \quad t_1 < \tau \le t_2$$

Siendo:

$$\mathbf{x}(t_1) = \boldsymbol{\psi}(t_1, t_o, \mathbf{x}(t_o), \mathbf{u}(\tau)) \quad con \quad t_o < \tau \le t_1$$

Esto significa que para conocer el estado en el instante t_2 **da lo mismo:**

- **Conocer el estado en t_o y la entrada entre t_o y t_2.**

- **Conocer el estado en t_1 y la entrada entre t_1 y t_2.**

4. Ecuaciones del modelo de estado.

Como se ha establecido previamente, la teoría de estado representa un formalismo para el tratamiento y resolución

de sistemas dinámicos determinísticos. Una definición amplia de dichos sistemas es la siguiente:

Un modelo de sistema dinámico determinista es una relación matemática entre dos conjuntos de variables, las de entrada y las de salida:

$$\mathbf{u}(t) \rightarrow \mathbf{y}(t)$$

Donde $\mathbf{u}(t)$ **es un vector de dimensión** ***m*** **e** $\mathbf{y}(t)$ **es un vector de dimensión** ***p .***

En la teoría moderna de control se añade otro conjunto de variables a las que se llama estados. Entradas y estados se encuentran relacionados como se vio en la ecuación (4).

Por otra parte, como el estado recoge toda la información del sistema en un determinado instante, es posible definir una relación de la salida del sistema con el estado y con la entrada. Dicha relación se establece mediante una ecuación de la forma:

$$\mathbf{y}(t) = \boldsymbol{\eta}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \qquad (5)$$

donde se puede observar que la salida en el instante t **sólo depende** ***del tiempo*****,** ***del estado*** **y** ***de la entrada*** **en ese instante no del estado y de la entrada en instantes anteriores.** ***Esto se debe a que toda esta información, por propia definición ya está recogida en el estado.***

Los sistemas dinámicos diferenciales se caracterizan porque pueden ser representados por una ecuación que incluya información del estado, de la forma:

$$d\mathbf{x}/dt = \mathbf{f}\left(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)\right) \qquad (6)$$

$$\mathbf{y}(t) = \boldsymbol{\eta}\left(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)\right) \qquad (7)$$

Donde la ecuación (6) se llama *ecuación de estado*, que representa la dinámica de la evolución del sistema y a la ecuación (7) se la denomina *ecuación de salida.*

La resolución de la ecuación (6) con unas determinadas condiciones iniciales da lugar a la ecuación (4), que describe la trayectoria seguida por el estado dentro del espacio de estado.
A la representación de estado descripta por las ecuaciones (6) y (7) se le llama *"realización en el espacio de estado del sistema".* Asimismo, se llama *"orden del modelo"* al número de variables de estado con el que se construye.

De las ecuaciones (6) y (7) se intuye:

i. **La continuidad de las trayectorias descritas por las variables de estado.**

ii. **La dimensión del vector de estado coincide con el número mínimo de condiciones iniciales necesarias para resolver la ecuación de estado.**

iii. **Pueden considerarse como variables de estado las salidas de los integradores.**

Como el estado es la representación suficiente del sistema, para determinar su dinámica, también basta el conocimiento de las variables de estado y de la ecuación de estado. De esta forma, aspectos como *la estabilidad* del sistema y sus *posibles estados de equilibrio*, entendiendo por tales valores del estado en los que el sistema funciona por tiempo indefinido sin que se produzca variación alguna, se estudian a partir de la ecuación (6). Los estados

de equilibrio se obtienen encontrando las soluciones de la ecuación:

$$\mathbf{f}\,,\big(t,\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t)\big)=0, \qquad (8)$$

5. Sistemas dinámicos lineales.

Para conocer si un sistema dinámico dado es o no lineal, se le aplica el Test de Superposición:

Se tiene un sistema que partiendo de un estado inicial cualquiera $\mathbf{x}_1(t_o)$, con una entrada cualquiera $\mathbf{u}_1(\tau)$, $t_o < \tau \le t$ responde con una salida $\mathbf{y}_1(t)$, y a partir de cualquier otro estado inicial $\mathbf{x}_2(t_o)$ con cualquier otra entrada $\mathbf{u}_2(\tau)$, $t_o < \tau \le t$, responde con otra salida $\mathbf{y}_2(t)$. Se dice que dicho sistema es lineal si para todo a y b reales, partiendo del estado inicial $\mathbf{x}_3(t_o) = a\,\mathbf{x}_1(t_o) + b\,\mathbf{x}_2(t_o)$ con una entrada $\mathbf{u}_3(\tau) = a\,\mathbf{u}_1(\tau) + b\,\mathbf{u}_2(\tau)$, $t_o < \tau \le t$, la salida es $\mathbf{y}_3(t) = a\,\mathbf{y}_1(t) + b\,\mathbf{u}_2(t)$.

Esta propiedad de linealidad en sistemas diferenciales, se traduce en que las funciones vectoriales: $\mathbf{f}$ y $\boldsymbol{\eta}$ son lineales con respecto a $\mathbf{x}$ y $\mathbf{u}$:

$$\mathbf{f}\left(t, a\mathbf{x}_1(t)+b\mathbf{x}_2(t), a\mathbf{u}_1(t)+b\mathbf{u}_2(t)\right)=$$
$$= a\,\mathbf{f}\left(t,\mathbf{x}_1(t),\mathbf{u}_1(t)\right)+b\,\mathbf{f}\left(t,\mathbf{x}_2(t),\mathbf{u}_2(t)\right) \quad (9)$$
$$\boldsymbol{\eta}\left(t, a\mathbf{x}_1(t)+b\mathbf{x}_2(t), a\mathbf{u}_1(t)+b\mathbf{u}_2(t)\right)=$$
$$= a\,\boldsymbol{\eta}\left(t,\mathbf{x}_1(t),\mathbf{u}_1(t)\right)+b\,\boldsymbol{\eta}\left(t,\mathbf{x}_2(t),\mathbf{u}_2(t)\right) \quad (10)$$

Donde $\mathbf{f}$ y $\boldsymbol{\eta}$, son funciones vectoriales, por lo que la propiedad de linealidad se verifica sí y solo si las ecuaciones del modelo de estado se pueden expresar matricialmente como:

$$d\mathbf{x}/dt = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)+\mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \quad (11)$$
$$\mathbf{y}(t)=\mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t)+\mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t) \quad (12)$$

6. Sistemas dinámicos invariantes

Un sistema con un estado inicial dado por $\mathbf{x}_o=\mathbf{x}(t_o)$, sometido a una entrada $\mathbf{u}_1(\tau),\quad t_o<\tau\le t,$ y que produce como salida $\mathbf{y}_1(t)$, se dice que es invariante si $\forall T$, partiendo del mismo estado $\mathbf{x}_o$, pero en el instante $t_o+T,$ es excitado con una entrada $\mathbf{u}_2(\tau+T)=\mathbf{u}_1(\tau),\quad t_o<\tau\le t,$ responde con una salida que es $\mathbf{y}_2(t+T)=\mathbf{y}_1(t)$.

Esta propiedad de invarianza significa que en los sistemas lineales las matrices $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$ tienen sus elementos constantes, es decir no son funciones del tiempo. De acuerdo a esto, *la representación de estado para los sistemas LTI es*:

$$d\mathbf{x}/dt = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\,\mathbf{u}(t) \qquad (13)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \qquad (14)$$

Ejemplo 2.

Considérese el sistema LTI, constituido por una masa, un resorte y una fricción viscosa, como se muestra en la figura 6.

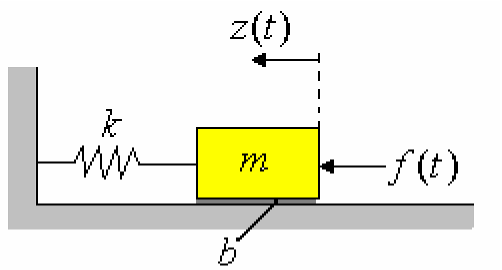


Fig. 6. Sistema masa-resorte-fricción viscosa.

El equilibrio dinámico de fuerzas está dado por (Ley de D'Alambert):

$$f(t) - b\cdot dz/dt - k\cdot z = m\cdot d^2z/dt^2$$

Un posible diagrama en bloques para esta ecuación diferencial se muestra en la figura 7:

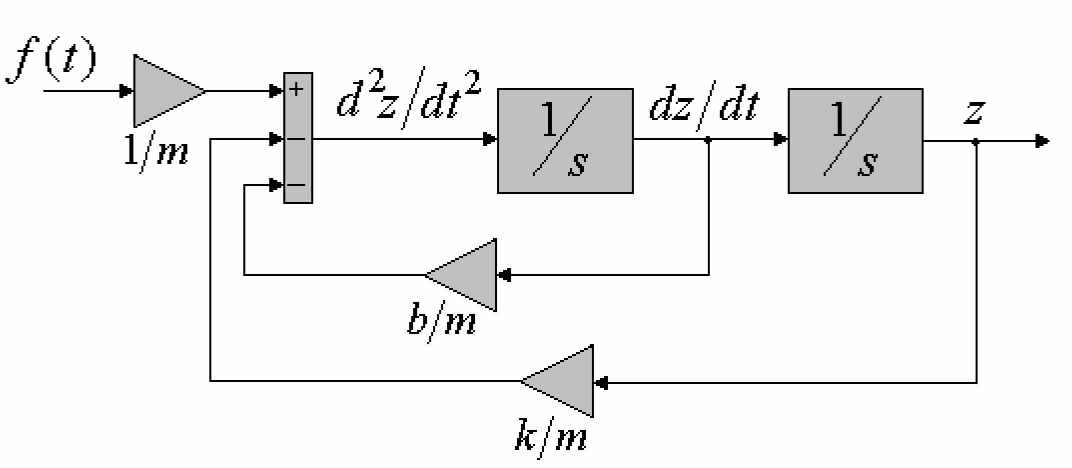


Fig. 7. Diagrama en bloques para el sistema m-b-k.

Tomando como variables de estado las salidas de los integradores (almacenadotes de energia), se tiene:

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1 = z \\ x_2 = dz/dt \end{array}}$$

Considerando como salida:

$$\boxed{y = z}$$

Considerando como entrada:

$$\boxed{u = f}$$

Sobre la base de lo expresado previamente, la *representación de estado* para el sistema del ejemplo es:

$$\begin{bmatrix} dx_1/dt \\ dx_2/dt \end{bmatrix} = \overset{\mathbf{A}}{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -b/m \end{bmatrix}} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \overset{\mathbf{B}}{\begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix}} \cdot u$$

$$y = \overset{\mathbf{C}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \overset{\mathbf{D}}{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}} \cdot u$$

En la representación indicada precedentemente, se pueden ver claramente las matrices del sistema $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$.

7. Transformaciones lineales.

Partiendo de una representación de estado lineal e invariante (LTI), cualquiera

$$\begin{aligned} d\mathbf{x}/dt &= \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{Cx} + \mathbf{Du} \end{aligned} \qquad (15)$$

Definiendo una matriz $\mathbf{T}$ de dimensión $n \times n$, tal que no sea singular (det.T≠0). Se define un nuevo vector de estado a partir de $\mathbf{x}$, mediante la expresión:

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{x} &= \mathbf{T}\tilde{\mathbf{x}} \\ \tilde{\mathbf{x}} &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}\end{aligned}} \qquad (16)$$

Sustituyendo (15) en (16) se obtiene:

$$\begin{aligned}\mathbf{T}\, d\tilde{\mathbf{x}}/dt &= \mathbf{A}\mathbf{T}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{T}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\mathbf{u}\end{aligned} \qquad (17)$$

Ordenando la (17) se obtiene:

$$\begin{aligned}d\tilde{\mathbf{x}}/dt &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\,\mathbf{T}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{T}\,\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\mathbf{u}\end{aligned} \qquad (18)$$

Las ecuaciones (18) suponen una nueva representación de estado, equivalente a la inicial. *Esta nueva representación de estado* da lugar a nuevas matrices del modelo, a saber:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{A}} &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\,\mathbf{T} \\ \tilde{\mathbf{B}} &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} \\ \tilde{\mathbf{C}} &= \mathbf{C}\mathbf{T} \\ \tilde{\mathbf{D}} &= \mathbf{D}\end{aligned} \qquad (19)$$

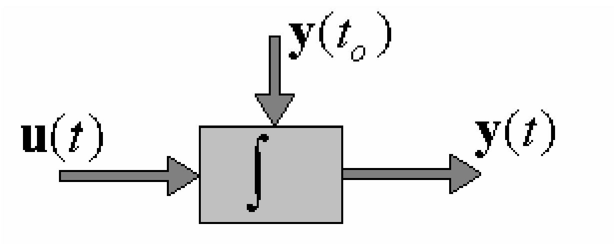
Partiendo de un modelo de estado cualquiera y conociendo la matriz de transformación $\mathbf{T}$, se puede obtener una nueva representación de estado. Esto es lo

que se conoce como una “transformación lineal en el espacio de estado”.
Lo que en realidad se está haciendo es un cambio de base, por lo que el vector de estado $\mathbf{x}(t)$ viene definido por distintas componentes, pero sigue siendo el mismo. La matriz de transformación $\mathbf{T}$ es tal que, sus columnas representan las coordenadas de los vectores que constituyen la nueva base, expresada en la base antigua.

8. Representación gráfica de sistemas lineales.

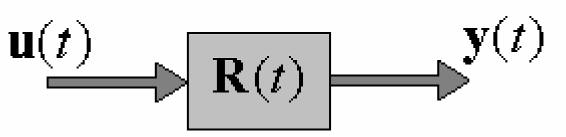
El modelo de estados de un sistema lineal **admite una forma gráfica por bloques, similar a la de los sistemas representados por su función transferencia. Hay tres tipos básicos de elementos.**

a) Bloque integrador



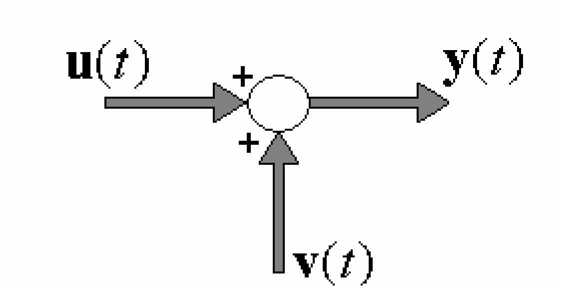
$$\mathbf{y}(t) = \int_{-\infty}^{t} \mathbf{u}(\tau)\,d\tau = \mathbf{y}(t_o) + \int_{t_o}^{t} \mathbf{u}(\tau)\,d\tau$$

b) Multiplicador por una matriz.



$$\boxed{\mathbf{y}(t) = \mathbf{R}(t)\mathbf{u}(t)}$$

c) Bloque sumador.



$$\boxed{\mathbf{y}(t) = \mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)}$$

Ejemplo 3.

Hallar la representación gráfica del sistema dado por su ecuación diferencial.

$$\frac{d^3 y(t)}{dt^3} + \alpha \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \beta \frac{dy(t)}{dt} + \gamma\, y(t) = u(t)$$

Despejando la derivada de mayor orden en la ecuación diferencial dada, se obtiene:

$$\frac{d^3 y(t)}{dt^3} = -\alpha \frac{d^2 y(t)}{dt^2} - \beta \frac{dy(t)}{dt} - \gamma\, y(t) + u(t)$$

En la figura 8 se muestra la representación gráfica de la ecuación diferencial dada.

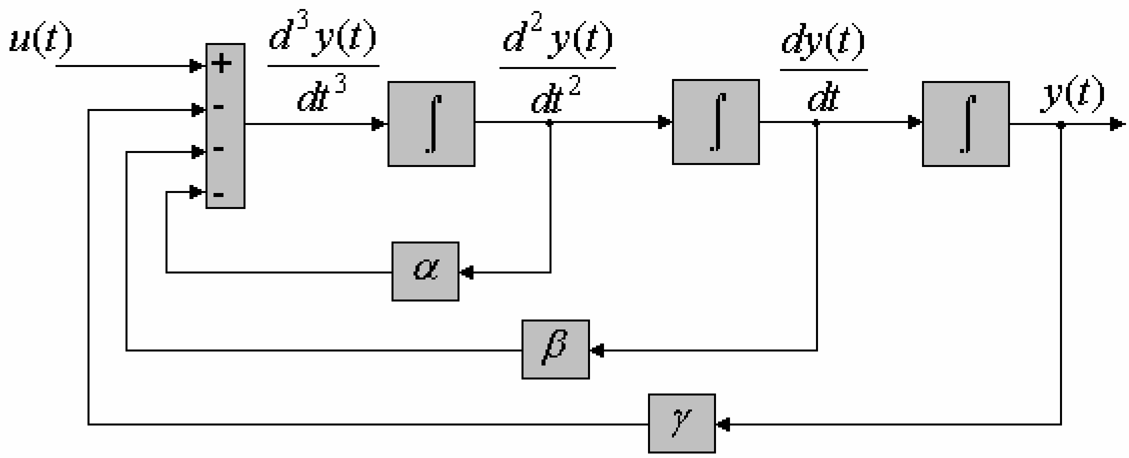


Fig.8. Representación gráfica de la ecuación diferencial.

Este ejemplo muestra un primer método para obtener el modelo de estado a partir de la representación gráfica:

Tomar como variables de estado las salidas de los integradores y considerar las condiciones iniciales en el instante t_0 como estado inicial.

Hay que recordar que un mismo sistema admite distintas representaciones de estado (a decir verdad, infinitas), lo que hará que el mismo sistema pueda estar representado por distintas matrices $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$.

Ejemplo 4.

Considérese el modelo de estado siguiente.

$$\begin{bmatrix} dx_1/dt \\ dx_2/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

La representación gráfica de este sistema, con los anteriores tipos de bloques, se muestra en la figura 9.

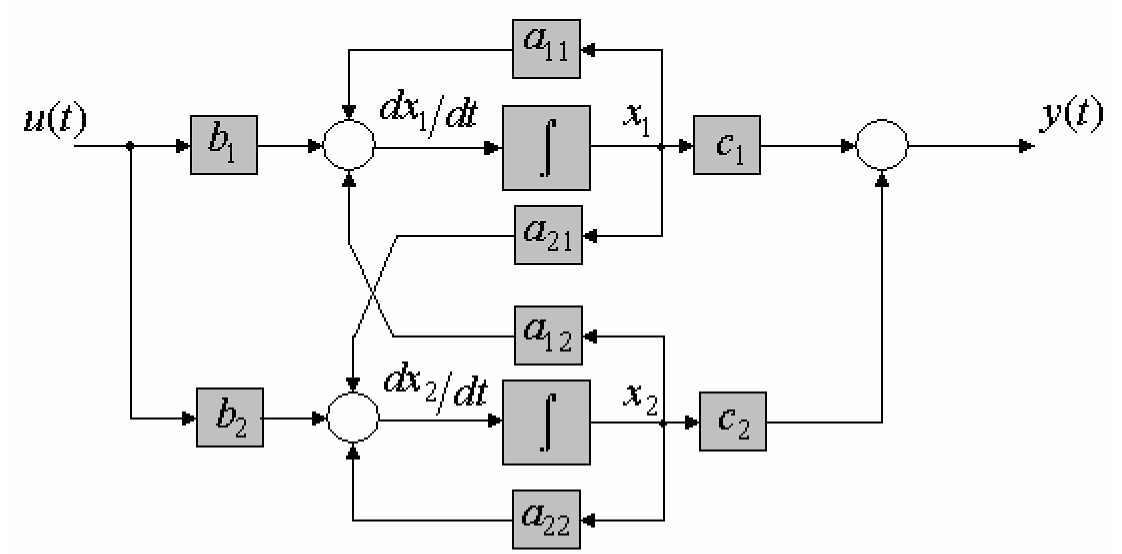


Fig. 9. Representación gráfica escalar.

En lugar de operar con escalares es más útil operar con vectores, como se muestra en la figura 10.

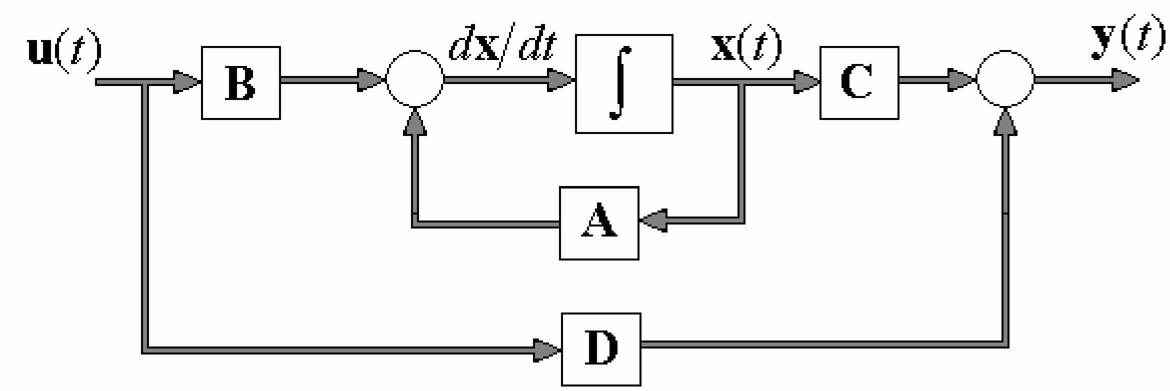


Fig. 10. Representación gráfica vectorial.

9. Función transferencia y modelo de estado.

En este apartado abordaremos el problema de obtener la función transferencia a partir de la representación de estado para un sistema LTI. Si el sistema no cumple con estas condiciones: Linealidad e invarianza , no es posible establecer esta relación, puesto que el modelo de la teoría

clásica requiere que el sistema cumpla con estas condiciones.
Sea el modelo de estado de un sistema LTI.

$$\boxed{\begin{aligned} d\mathbf{x}/dt &= \mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x}+\mathbf{D}\mathbf{u} \end{aligned}} \qquad (20)$$

Tomando la transformada de Laplace de las ecuaciones (20), se obtiene:

$$s\,\mathbf{X}(s)-\mathbf{X}(0)=\mathbf{A}\,\mathbf{X}(s)+\mathbf{B}\,\mathbf{U}(s) \qquad (21)$$

Donde $\mathbf{X}(0)$ ***= vector de condiciones iniciales.*** **Si** $\mathbf{X}(0)=\mathbf{0}$ **, entonces**

$$\mathbf{X}(s)=\left(s\mathbf{I}-\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{B}\,\mathbf{U}(s) \qquad (22)$$

Reemplazando el vector de estado transformado, dado por la ecuación (22), en la ecuación de salida del sistema, se obtiene:

$$\mathbf{Y}(s)=\mathbf{C}\left[\left(s\mathbf{I}-\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s)\right]\mathbf{U}(s)+\mathbf{D}\mathbf{U}(s) \qquad (23)$$

Ordenando la ecuación (23), se tiene:

$$\mathbf{Y}(s)=\left[\mathbf{C}\left(s\mathbf{I}-\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s)+\mathbf{D}\right]\mathbf{U}(s) \qquad (24)$$

En la ecuación (24) se ve claramente la matriz de transferencia del sistema, que denominaremos $\mathbf{G}(s)$, y cuyos elementos son funciones de transferencia (cociente de polinomios). La dimensión de $\mathbf{G}(s)$ es $p \times m$.

$$\boxed{\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}\left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s) + \mathbf{D}} \qquad (25)$$

De esta manera se tiene una relación entre la función transferencia de la teoría clásica y la representación de estado de la teoría moderna.

Como ya se ha visto, un mismo sistema admite infinitas representaciones de estado, pudiendo obtenerse una cualquiera de ellas a partir de una dada, mediante la aplicación de una transformación lineal.

10. Invariancia de la función transferencia ante una transformación lineal.

La función transferencia de un sistema es única, y la representación de estado admite infinitos modelos.

Anteriormente se vio que la función transferencia de un sistema, partiendo de la representación de estado está dada por la ecuación (25):

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}\left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s) + \mathbf{D} \qquad (25)$$

Si aplicamos una transformación lineal, empleando las ecuaciones (19):

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{A}} &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\,\mathbf{T}\\ \tilde{\mathbf{B}} &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}\\ \tilde{\mathbf{C}} &= \mathbf{C}\mathbf{T}\\ \tilde{\mathbf{D}} &= \mathbf{D}\end{aligned} \qquad (19)$$

La correspondiente función transferencia, luego de la transformación lineal, es:

$$\tilde{\mathbf{G}}(s) = \tilde{\mathbf{C}}\left(s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}\right)^{-1}\tilde{\mathbf{B}}\mathbf{U}(s) + \tilde{\mathbf{D}} \qquad (26)$$

Reemplazando en la ecuación (26), **las matrices dadas por la** (19), **se obtiene:**

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{G}}(s) &= \tilde{\mathbf{C}}\left(s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}\right)^{-1}\tilde{\mathbf{B}}\mathbf{U}(s) + \tilde{\mathbf{D}} =\\ &= \mathbf{C}\mathbf{T}\left(s\mathbf{I} - \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}\right)^{-1}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}\\ &= \mathbf{C}\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1}\left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}\\ \tilde{\mathbf{G}}(s) &= \mathbf{C}\left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} = \mathbf{G}(s)\end{aligned} \qquad (27)$$

Es decir, coincidiendo con la teoría clásica de control, la función transferencia que rige la relación entrada-salida de un sistema es única, sea cual sea el modelo de estado del sistema.

Teniendo en cuenta que:

$$\left(s\mathbf{I}-\mathbf{A}\right)^{-1}=\frac{1}{\left|\left(s\mathbf{I}-\mathbf{A}\right)\right|}Adj\left(s\mathbf{I}-\mathbf{A}\right)^{T} \tag{28}$$

Se concluye que el polinomio característico del sistema, está dado por el denominador de la (28), es decir:

$$Q(s)=\left|\left(s\mathbf{I}-\mathbf{A}\right)\right| \tag{29}$$

por lo que los polos del sistema coinciden con los valores propios de la matriz $\mathbf{A}$.

$$Polos = Valores\ propios\ de\ \mathbf{A}$$

Se ve asimismo que, como el polinomio característico solo depende de $\mathbf{A}$, también ha de ser así con la estabilidad del sistema. La *posición de los ceros* viene dada por las matrices $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$.

Ejemplo 5.

Considérese el sistema dado por su modelo de estado:

$$\begin{bmatrix} dx_1/dt \\ dx_2/dt \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 6.5 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Determínese (a) Los polos del sistema, (b) la matriz de transferencia, (c) graficar la respuesta del sistema a un escalón unitario aplicado en u_1 y u_2.

Solución:

(a) Polos del sistema.

Los polos del sistema son los valores propios (autovalores) de la matriz $\mathbf{A}$.

Los autovalores se pueden calcular algebraicamente o bien utilizando MATLAB, en este caso lo haremos según la segunda opción.

```
>> A=[-1 -1;6.5 0]

A =

  -1.0000  -1.0000
   6.5000        0

>> eig(A)

ans =

 -0.5000 + 2.5000i
 -0.5000 - 2.5000i
```

Los polos del sistema son complejos conjugados y están en $p_{1,2} = -0.50 \pm j2.50$

(b) Matriz de transferencia.

La matriz de transferencia se puede calcular con la ecuación (25) o bien utilizando las sentencias abreviadas de MATLAB. Lo haremos según la segunda opción.

```
>> A=[-1 -1;6.5 0];
```

```
>> B=[1 1;1 0];
>> C=[1 0;0 1];
>> D=[0 0;0 0];
>> [n,d]=ss2tf(A,B,C,D,1)

n =

         0    1.0000   -1.0000
         0    1.0000    7.5000


d =

    1.0000    1.0000    6.5000

>> [n,d]=ss2tf(A,B,C,D,2)

n =

         0    1.0000    0.0000
         0         0    6.5000


d =

    1.0000    1.0000    6.5000
```

Las cuatro funciones transferencia, que son elementos de la matriz de transferencia, son:

$$\frac{Y_1}{U_1} = \frac{s-1}{s^2+s+6.5}, \qquad \frac{Y_1}{U_2} = \frac{s+7.5}{s^2+s+6.5}$$

$$\frac{Y_2}{U_1} = \frac{s}{s^2 + s + 6.5}, \qquad \frac{Y_2}{U_2} = \frac{6.5}{s^2 + s + 6.5}$$

(c) Respuesta del sistema a un escalón unitario.

La respuesta del sistema a un escalón unitario, se puede obtener a partir del modelo de estado o mediante la matriz de transferencia. En este caso se utilizará el modelo de estado, empleando MATLAB. Un simple programa permitirá la obtención de la respuesta.

```
>> A=[-1 -1;6.5 0];
>> B=[1 1;1 0];
>> C=[1 0;0 1];
>> D=0,

D =

0

>> step(A,B,C,D)
>> grid
```

En la figura 11 se muestra la respuesta de cada salida frente a cada entrada escalón unitario.

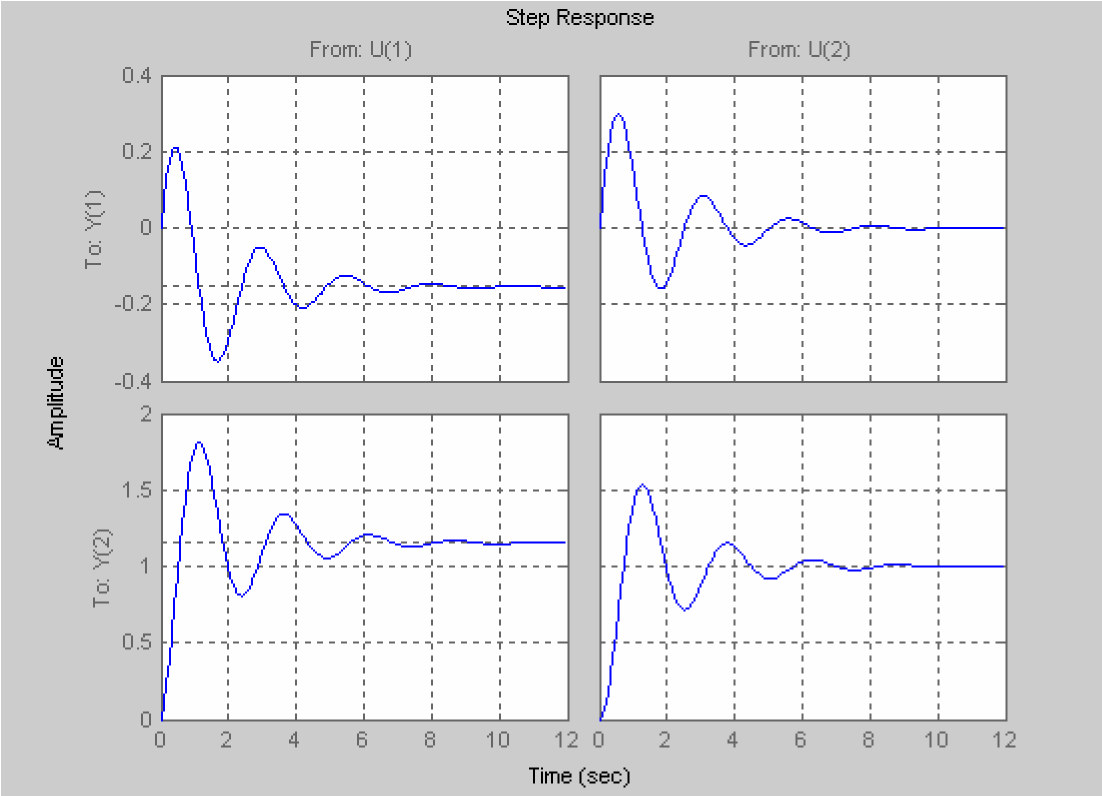


Fig.11. Respuesta del sistema frente a un escalón unitario.

11. Métodos de obtención del modelo de estado.

Como se ha mencionado, la representación de estado de un sistema no es única, sino que pueden encontrarse infinitas, todas ellas equivalentes entre sí, e igualmente válidas para la descripción del sistema. A continuación veremos algunas técnicas para obtener una representación del estado, de forma que dado un sistema cada una de ellas es diferente, pudiendo obtenerse una a partir de otra mediante transformacines lineales.
Observando las ecuaciones de estado y de salida del sistema:

$$\boxed{\begin{array}{l} d\mathbf{x}/dt = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du} \end{array}}$$

Se pueden deducir las siguientes condiciones, que habrá que tener en cuenta cuando se elige un modelo de estado:

1. ***En las ecuaciones de estado sólo pueden estar relacionadas las variables de estado, sus primeras derivadas y las entradas.***

2. ***En la ecuación de salida sólo pueden estar relacionadas las variables de estado, las entradas y salidas.***

3. ***Las variables de estado no pueden presentar discontinuidades, aunque la entrada al sistema sí que las tenga, pues en tal caso la derivada de la variable de estado que aparece en la ecuación (6) no estaría definida.***

4. ***Se admiten discontinuidades en la entrada (por ejemplo, entrada escalón), por lo que en ningún caso pueden elegirse las entradas como variables de estado del sistema.***

Existen distintas posibilidades de elección de las variables de estado de un sistema para cada una de las cuales las ecuaciones de estado que definen su comportamiento, (6) y (7), tienen distinta expresión.
Algunas de las metodologías para elegir las variables de estado de un sistema son:

a. ***Variables de estado como magnitudes físicas del sistema.***

b. ***Variables de estado como salida de los integradores del sistema.***

c. ***Variables de estado de fase.***

d. Variables de estado de Jordan.

Las metodologías presentadas tienen un orden tal que las variables de estado elegidas en cada una de ellas presentan un orden decreciente en su significado físico y un orden creciente en cuanto a la simplicidad del modelo matemático resultante.
De acuerdo a este criterio de ordenación, la metodología (a) puede considerarse la más intuitiva desde el punto de vista físico y, las dos últimas (c) y (d) como las que presentan una mayor elaboración matemática, que repercute en la simplicidad de las ecuaciones del modelo de estado resultante. La segunda (b) , basada en la salida de los integradores , puede considerarse con unas características intermedias , en las que las variables de estado elegidas pueden tener una interpretación física y adicionalmente se puede sistematizar su elección para la obtención del modelo de estado sencillo.
Las dos últimas metodologías son aplicables solamente a sistemas lineales, mientras que la primera es la más genérica y menos sistematizada, pudiendo aplicarse a cualquier tipo de sistema dinámico lineal o no-lineal. La segunda puede aplicarse también a todo tipo de sistemas, si bien en el caso de sistemas lineales se puede predecir la forma del modelo de estado resultante.

11. a. Variables de estado como magnitudes físicas.

La idea básica es seleccionar como variables de estado los elementos que acumulan energía, lo que impide que las variables de estado presenten discontinuidades. Al hablar de elementos que acumulan energía, se hace referencia tanto a elementos que *acumulan energía potencial* (tensión en un capacitor, posición de una masa suspendida, nivel de líquido en un depósito, etc.), como a aquellos que *acumulan energía cinética*(corriente en una

bobina, velocidad de una masa desplazándose, objeto girando a cierta frecuencia, etc.).

Cuando alguno de estos elementos acumuladores de energía son puestos en contacto con un entorno que tiene un nivel energético distinto, se produce una transmisión de energía hasta producir un equilibrio energético, con la característica que dicha transmisión *no es instantánea en ningún caso*: el capacitor tiene una función de descarga, la masa suspendida cae con una aceleración finita, el móvil giratorio se desacelera con una cierta aceleración angular, etc.

Por tanto, las variables que pueden elegirse como variables de estado son aquellas que caracterizan esta transmisión de energía entre un objeto y el medio, y que al representar esa dinámica no podrán sufrir variaciones bruscas:

- **En sistemas eléctricos: las tensiones en los capacitores y las corrientes en los inductores.**

- **En sistemas mecánicos: las posiciones (energía potencial) y las velocidades (energía cinética).**

- **En sistemas hidráulicos: nivel en los depósitos (energía potencial).**

- **En sistemas térmicos: temperatura (energía térmica).**

Ejemplo 6.

Elegir un conjunto de variables de estado, como magnitudes físicas, para el sistema de la figura.

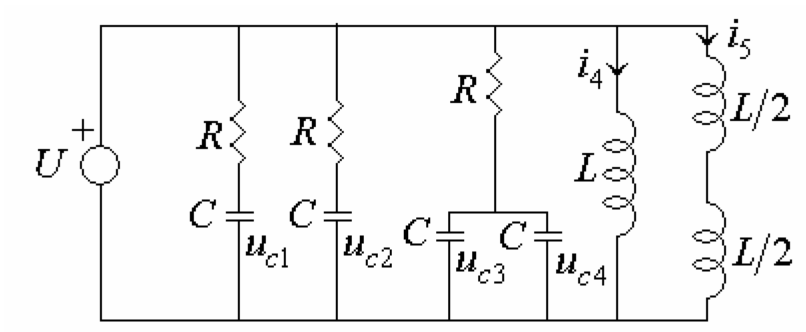


Fig. 12. Sistema eléctrico.

Las variables de estado, que representan magnitudes físicas, para el sistema del ejemplo son:

$$x_1 = u_{c1}$$

$$x_2 = u_{c2}$$

$$x_3 = u_{c3} = u_{c4} = u_c$$

$$x_4 = i_4$$

$$x_5 = i_5$$

Es decir el sistema resulta de quinto orden (5 variables de estado independientes).

<u>Ejemplo 7.</u>
Elegir un conjunto de variables de estado, como magnitudes físicas, para el sistema de la figura.

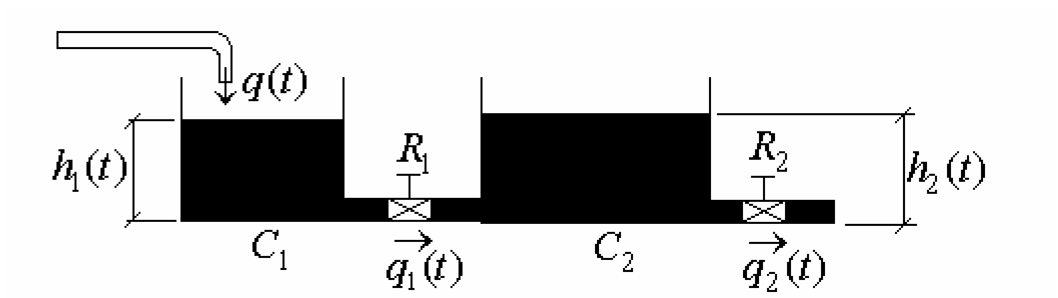


Fig. 13. Sistema hidráulico.

Las variables de estado, que representan magnitudes físicas, para el sistema del ejemplo son:

$$x_1 = h_1$$
$$x_2 = h_2$$

El sistema físico es de segundo orden (dos variables de estado).

11. b. Variables de estado como salida de los integradores.

Una opción clara para elegir variables de estado de acuerdo con la definición dada oportunamente, es seleccionar éstas como las variables que representan las condiciones iniciales de las ecuaciones diferenciales que definen el comportamiento dinámico del sistema. Esta elección es equivalente a expresar dichas ecuaciones diferenciales en forma de integraciones sucesivas y elegir como variables de estado la salida de cada uno de los integradores, que por tanto no presentan discontinuidades en sus valores ante discontinuidades de la entrada.
Este procedimiento puede aplicarse en forma genérica tanto a sistemas lineales como a sistemas no-lineales. **El procedimiento se aplicará en forma sistemática a sistemas lineales en general, con el fin de obtener un modelo de estado genérico para sistemas monovariables.**
Sea el sistema LTI monovariable general, dado por la ecuación polinómica:

$$(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0)\,y = (b_n s^n + \cdots + b_1 s + b_0)u \tag{30}$$

Reordenando y sacando factor común el operador derivada, resulta:

$$s[(s^{n-1}+a_{n-1}s^{n-2}+\cdots+a_1)y-(b_ns^{n-1}+\cdots+b_1)u]=b_0u-a_0y \tag{31}$$

Donde el término entre corchetes se obtiene mediante la integración del término de la derecha de la ecuación (31), y por lo tanto puede ser elegida como variable de estado x_1, de esta manera se puede descomponer la ecuación anterior, en las dos ecuaciones siguientes:

$$dx_1/dt=b_0u-a_0y \tag{32}$$

$$x_1=(s^{n-1}+a_{n-1}s^{n-2}+\cdots+a_1)y-(b_ns^{n-1}+\cdots+b_1)u \tag{33}$$

que son respectivamente la ecuación de salida del integrador y la ecuación que describe la variable de estado.
Procediendo de forma análoga con la ecuación (33) se obtiene:

$$s[(s^{n-2}+a_{n-1}s^{n-3}+\cdots+a_2)y-(b_ns^{n-2}+\cdots+b_2)u]=x_1+b_1u-a_1y \tag{34}$$

Nuevamente el término entre corchetes se elige como la siguiente variable de estado, resultando:

$$dx_2/dt=x_1+b_1u-a_1y \tag{35}$$

$$x_2=(s^{n-2}+a_{n-1}s^{n-3}+\cdots+a_2)y-(b_ns^{n-2}+\cdots+b_2)u \tag{36}$$

Procediendo reiteradamente, se van obteniendo ecuaciones con la siguiente expresión genérica:

$$dx_i/dt = x_{i-1} + b_{i-1}u - a_{i-1}y \qquad (37)$$

hasta obtener las dos últimas ecuaciones:

$$dx_n/dt = x_{n-1} + b_{n-1}u - a_{n-1}y \qquad (38)$$

$$x_n = y - b_n u \qquad (39)$$

La ecuación (39) , es la ecuación de salida del sistema que puede escribirse como:

$$y = x_n + b_n u \qquad (40)$$

Introduciendo este valor de y **en las ecuaciones anteriores de salida de los integradores representadas por su expresión genérica (37), se obtiene:**

$$dx_1/dt = -a_0 x_n + (b_0 - b_n a_0)u, \quad para\ i = 1 \qquad (41)$$

$$dx_i/dt = x_{i-1} - a_{i-1}x_n + (b_{i-1} - a_{i-1}b_n)u, \quad para\ 1 < i \leq n \qquad (42)$$

Lo anterior expresado en forma matricial, da lugar al siguiente modelo de estado:

$$\begin{bmatrix} dx_1/dt \\ dx_2/t \\ dx_3/dt \\ \vdots \\ dx_n/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 - b_n a_0 \\ b_1 - b_n a_1 \\ b_2 - b_n a_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} - b_n a_{n-1} \end{bmatrix} u \qquad (43)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + b_n u \qquad (44)$$

Las ecuaciones (43) y (44) se pueden representar mediante un diagrama en bloques, para ver gráficamente el proceso de integración realizado para obtener el modelo de estado. En la figura (14) se muestra el diagrama en bloques.

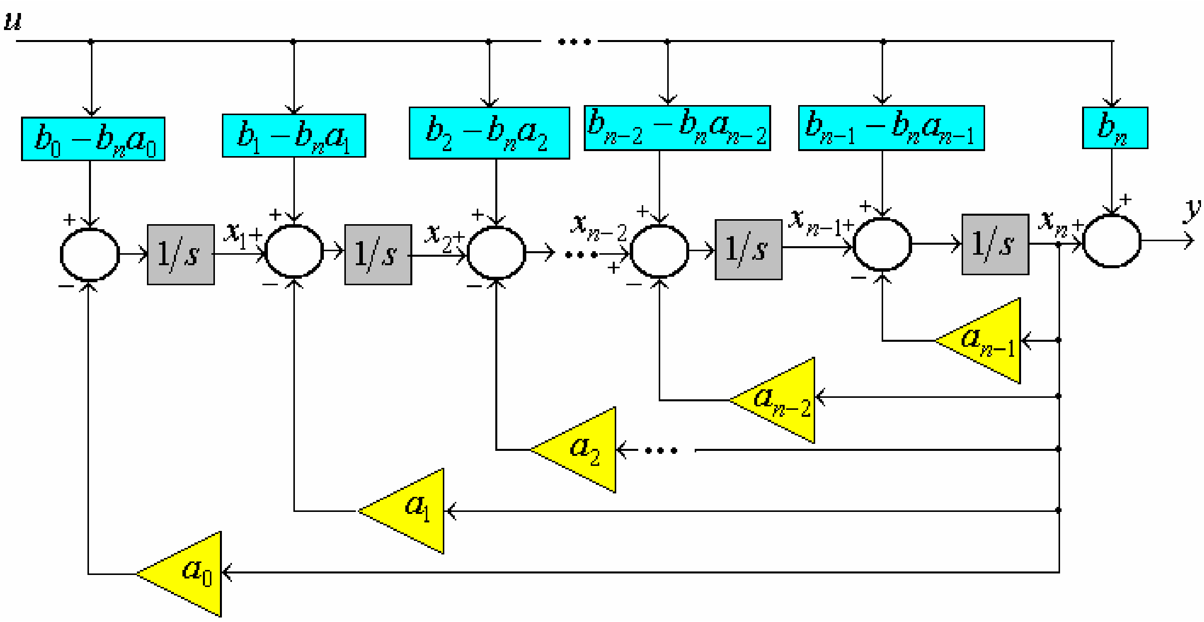


Fig. 14. Diagrama en bloques para el sistema con las variables de estado como salida de los integradores.

11. c. Variables de estado de fase.

Considerando la expresión genérica de un sistema monovariable:

$$(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0)\,y = (b_n s^n + \cdots + b_1 s + b_0)\,u$$

Dicha expresión puede escribirse como cociente de dos polinomios en el operador derivada $d/dt \triangleq s$:

$$y = \frac{b_n s^n + b_{n-1}s^{(n-1)} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{(n-1)} + \cdots + a_1 s + a_0}\,u \qquad (45)$$

El procedimiento de elección de variable de estado de fase consiste en elegir como primera variable de estado x_1**:**

$$x_1 = \frac{1}{s^n + a_{n-1}s^{(n-1)} + \cdots + a_1 s + a_0}\cdot u \qquad (46)$$

Esto significa que x_1 **es solución de la ecuación diferencial:**

$$dx_1^n / dt^n + a_{n-1}\,dx_1^{(n-1)} / dt^{(n-1)} + \cdots + a_1\,dx_1/dt + a_0 x_1 = u$$
(47)

Las restantes variables se eligen como sucesivas derivadas:

$$
\begin{aligned}
&x_2 = dx_1/dt \\
&x_3 = dx_2/dt = d^2x_1/dt^2 \\
&\vdots \qquad \vdots \\
&x_n = dx_{n-1}/dt = dx_1^{n-1}/dt^{n-1}
\end{aligned}
\qquad (48)
$$

Sobre la base de este criterio se pueden escribir las ecuaciones de estado de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
&dx_1/dt = x_2 \\
&dx_2/dt = x_3 \\
&\vdots \qquad \vdots \\
&dx_{n-1}/dt = x_n \\
&dx_n/dt^n = s^n x_1 = -a_{n-1}s^{(n-1)}x_1 - a_{n-2}s^{(n-2)}x_1 - \cdots - a_1 s x_1 - a_0 x_1 + u \\
&\qquad\qquad = -a_{n-1}x_n - a_{n-2}x_{n-1} - \cdots - a_1 x_2 - a_0 x_1 + u
\end{aligned}
$$

(49)

Sobre la base de las ecuaciones (48) y (49), se pueden escribir las ecuaciones de estado en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} dx_1/dt \\ dx_2/dt \\ dx_3/dt \\ \vdots \\ dx_{n-1}/dt \\ dx_n/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

(50)

La ecuación de salida es:

$$y = (b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0) x_1 \qquad (51)$$

Reemplazando en la ecuación de salida (51), la relación (52), se obtiene:

$$s^n x_1 = -a_{n-1} x_n - a_{n-2} x_{n-1} - \cdots - a_1 x_2 - a_0 x_1 + u$$

(52)

$$y = (b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0) x_1 =$$

$$= b_n \left[-a_0 x_1 - a_1 x_2 - \cdots - a_{n-1} x_n + u \right] + b_{n-1} x_n + \cdots + b_1 x_2 + b_0 x_1$$

(53)

Ordenando los términos de la ecuación (53), se obtiene la ecuación de salida:

$$y = (b_0 - b_n a_0) x_1 + (b_1 - b_n a_1) x_2 + \cdots + (b_{n-1} - b_n a_{n-1}) x_n + b_n u$$

En forma matricial:

$$y = \begin{bmatrix} b_0 - b_n a_0 & b_1 - b_n a_1 & \cdots & b_{n-2} - b_n a_{n-2} & b_{n-1} - b_n a_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} + b_n u$$

(54)

En la figura 15 se muestra un diagrama en bloques para la representación en variables de fase.

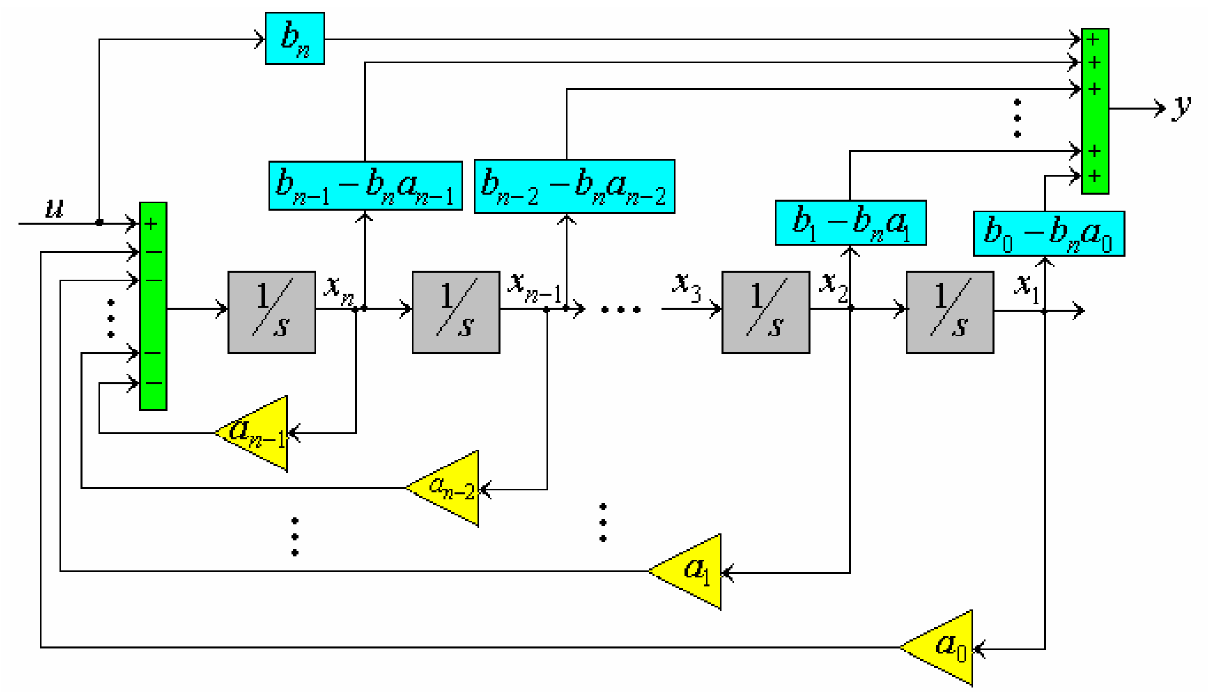


Fig.15. Diagrama en bloques del modelo por variables de fase.

11. d. Variables de estado de Jordan.

Partiendo de la ecuación (45) que repetimos aquí por comodidad:

$$y = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{(n-1)} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{(n-1)} + \cdots + a_1 s + a_0} u$$

1. Si todos los polos son simples, y se descompone en fracciones simples , se obtiene :

$$y = \left(b_n + \frac{\rho_1}{s+\lambda_1} + \frac{\rho_2}{s+\lambda_2} + \cdots + \frac{\rho_n}{s+\lambda_n} \right) u \qquad (55)$$

Se le asigna una variable de estado a cada uno de los operadores:

$$\begin{array}{lll}
x_1 = \dfrac{1}{s+\lambda_1} u & \rightarrow & \dfrac{dx_1}{dt} = -\lambda_1 x_1 + u \\
x_2 = \dfrac{1}{s+\lambda_2} u & \rightarrow & \dfrac{dx_2}{dt} = -\lambda_2 x_2 + u \\
x_3 = \dfrac{1}{s+\lambda_3} u & \rightarrow & \dfrac{dx_3}{dt} = -\lambda_3 x_3 + u \\
\vdots \quad \vdots & \vdots & \vdots \\
x_n = \dfrac{1}{s+\lambda_n} u & \rightarrow & \dfrac{dx_n}{dt} = -\lambda_n x_n + u
\end{array} \qquad (56)$$

De esta manera la ecuación de estado, en forma matricial, viene representada por:

$$\begin{bmatrix} dx_1/dt \\ dx_2/dt \\ \vdots \\ dx_n/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u$$

(57)

Como se observa la matriz del sistema, $\mathbf{A}$, resulta ser diagonal, para el caso polos simples, y la matriz $\mathbf{B}$ es una columna de unos.

En cuanto a la ecuación de salida, la misma se puede escribir como:

$$y = \begin{bmatrix} \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_n\, u \qquad (58)$$

<u>Observaciones:</u>

(a).Como se puede observar en las ecuaciones (57) la matriz $\mathbf{A}$, del sistema, resulta diagonal con sus elementos iguales a los autovalores (polos) del sistema.

(b).Asimismo en las ecuaciones (58) se puede observar que la matriz de salida, $\mathbf{C}$, contiene como elementos los residuos en lo polos del sistema.

(c). La matriz de transferencia directa entre la entrada y la salida, $\mathbf{D}$, es distinta de cero si el $grado(num) = grado(den)$, si $grado(num) < grado(den)$, la matriz es nula.

En la figura 16 se muestra el diagrama en bloques del sistema para la representación en variables de Jordan cuando los polos son simples.

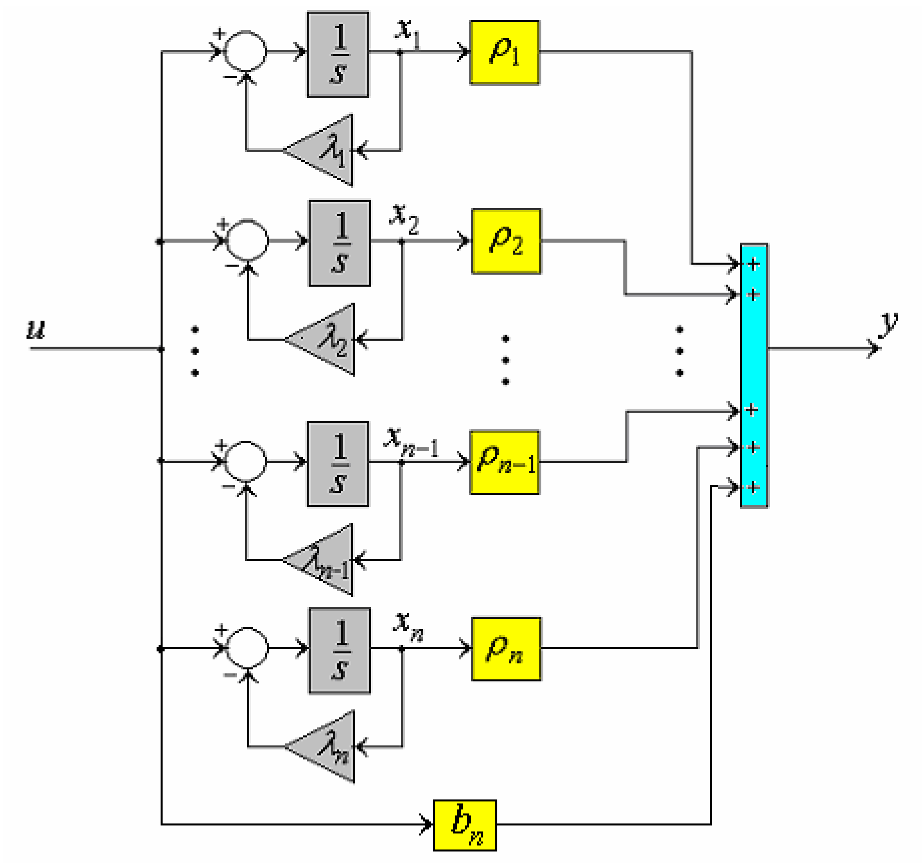


Fig. 16. Diagrama en bloques de la representación de Jordan para polos simples.

Como se puede observar en la figura 16 los modos de oscilación del sistema, polos simples, están desacoplados, y el diagrama en bloques resultan sus ramas en paralelo.

2. Si el sistema tiene polos múltiples, de multiplicidad r, la descomposición se realiza como:

$$y = \left(b_n + \frac{\rho_1}{(s+\lambda_1)^r} + \cdots + \frac{\rho_{r-1}}{(s+\lambda_1)^2} + \frac{\rho_r}{(s+\lambda_1)} + \frac{\rho_{r+1}}{(s+\lambda_{r+1})} + \cdots + \frac{\rho_n}{(s+\lambda_n)} \right) u \tag{59}$$

El método de asignación de variables de estado será:

$$\begin{array}{l}
x_1 = \dfrac{1}{(s+\lambda_1)^r} u = \dfrac{1}{s+\lambda_1} x_2 \quad \rightarrow \quad \dfrac{dx_1}{dt} = -\lambda_1 x_1 + x_2 \\
x_2 = \dfrac{1}{(s+\lambda_1)^{r-1}} u = \dfrac{1}{s+\lambda_1} x_3 \quad \rightarrow \quad \dfrac{dx_2}{dt} = -\lambda_1 x_2 + x_3 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
x_{r-1} = \dfrac{1}{(s+\lambda_1)^2} u = \dfrac{1}{s+\lambda_1} x_r \quad \rightarrow \quad \dfrac{dx_{r-1}}{dt} = -\lambda_1 x_{r-1} + x_r \\
x_r = \dfrac{1}{(s+\lambda_1)} u = \quad \rightarrow \quad \dfrac{dx_r}{dt} = -\lambda_1 x_r + u \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
x_n = \dfrac{1}{(s+\lambda_n)} u = \quad \rightarrow \quad \dfrac{dx_n}{dt} = -\lambda_n x_n + u
\end{array} \tag{60}$$

Sobre la base de las ecuaciones (60), la ecuación de estado toma la forma:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\begin{bmatrix} -\lambda_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\lambda_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\lambda_{r+1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda_n \end{bmatrix}\mathbf{x}+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}u \tag{61}$$

En forma semejante se obtiene la ecuación de salida:

$$y=\begin{bmatrix} \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{r-1} & \rho_r & \rho_{r+1} & \cdots & \rho_n \end{bmatrix}\mathbf{x}+b_n u \tag{62}$$

En la figura 17 se muestra el aspecto del diagrama en bloques, para la forma de Jordan con polos de multiplicidad *r*.

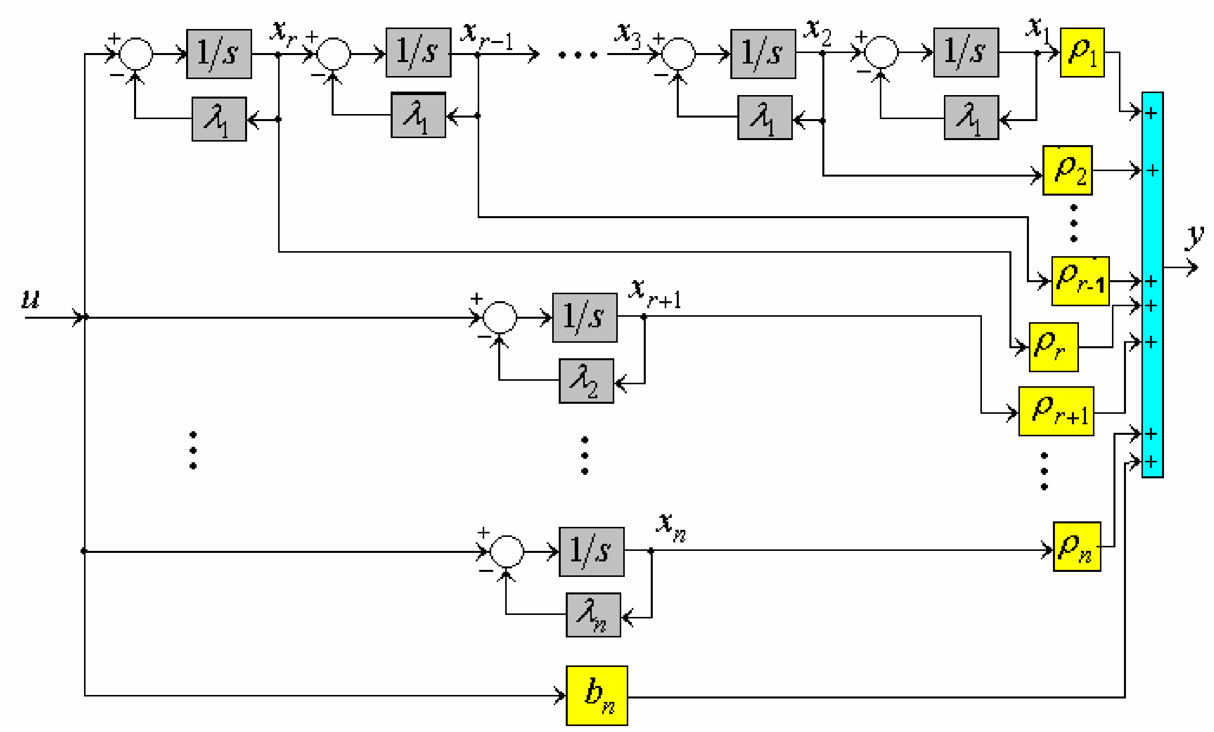


Fig. 17. Diagrama en bloques de la representación de Jordan con polos de multiplicidad r.

Como puede verse en la figura 17 la representación de Jordan para un sistema con polos de multiplicidad r , tiene tantos bloques en serie como el orden de multiplicidad de los polos, los restantes bloques están en paralelo.

Conclusión del punto 11.

La conclusión de este punto es que, para un sistema descripto mediante ecuaciones diferenciales, se pueden extraer de forma sencilla cuatro (4) representaciones de estado diferentes (11a, 11b, 11c y 11d), que darán lugar a cuatro conjuntos de matrices que representan lo mismo. Adicionalmente mediante transformaciones lineales se podrán obtener otros conjuntos de matrices , que pueden ser útiles para análisis y diseño de controles.

12.Estructuras compuestas.

Los *sistemas multivariables* pueden considerarse compuestos por varios *subsistemas* más sencillos conectados entre sí , de manera que las salidas de unos subsistemas actúan como entradas de otros de forma directa o mediante sencillas operaciones algebraicas. Las variables de estado del sistema global están formadas de manera natural por la unión de las variables de estado de c/u de los subsistemas que lo componen.

La obtención de las ecuaciones de estado del sistema global se puede realizar a partir de las ecuaciones de estado de cada subsistema, eliminando las variables intermedias que son salidas de unos subsistemas y entradas de otros, mediante la operación con las ecuaciones de estado de dichos subsistemas. A continuación veremos algunos casos de conexión de sistemas más habituales.

12.1. Sistemas disjuntos en serie.

Considérese dos sistemas disjuntos en serie, como se muestra en la figura 18:

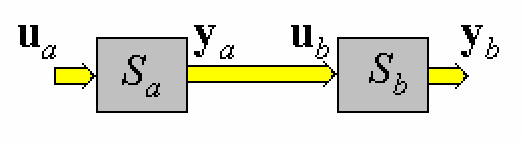


Fig.18. Sistemas en serie.

Cada uno de los sistemas cumple con:

$$S_a : \begin{cases} d\mathbf{x}_a / dt = \mathbf{A}_a \mathbf{x}_a + \mathbf{B}_a \mathbf{u}_a \\ \mathbf{y}_a = \mathbf{C}_a \mathbf{x}_a + \mathbf{D}_a \mathbf{u}_a \end{cases}$$

$$S_b : \begin{cases} d\mathbf{x}_b / dt = \mathbf{A}_b \mathbf{x}_b + \mathbf{B}_b \mathbf{u}_b \\ \mathbf{y}_b = \mathbf{C}_b \mathbf{x}_b + \mathbf{D}_b \mathbf{u}_b \end{cases}$$

La entrada del sistema conjunto es $\mathbf{u} = \mathbf{u}_a$, y la salida es $\mathbf{y} = \mathbf{y}_b$; por construcción se cumple que $\mathbf{u}_b = \mathbf{y}_a$.

El estado del sistema conjunto será la unión de los dos subsistemas:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix}$$

Sustituyendo $\mathbf{u}_b \quad por \quad \mathbf{y}_a$ **, se obtiene el modelo de estado del sistema conjunto:**

$$\begin{cases} d\mathbf{x}_a / dt = \mathbf{A}_a \mathbf{x}_a + \mathbf{B}_a \mathbf{u}_a \\ d\mathbf{x}_b / dt = \mathbf{A}_b \mathbf{x}_b + \mathbf{B}_b \left(\mathbf{C}_a \mathbf{x}_a + \mathbf{D}_a \mathbf{u}_a \right) \\ \mathbf{y}_b = \mathbf{C}_b \mathbf{x}_b + \mathbf{D}_b \left(\mathbf{C}_a \mathbf{x}_a + \mathbf{D}_a \mathbf{u}_a \right) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} d\mathbf{x}_a / dt \\ d\mathbf{x}_b / dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_a & 0 \\ \mathbf{B}_b \mathbf{C}_a & \mathbf{A}_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_a \\ \mathbf{B}_b \mathbf{D}_a \end{bmatrix} \mathbf{u} \\ \\ \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_b \mathbf{C}_a & \mathbf{C}_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{D}_b \mathbf{D}_a \end{bmatrix} \mathbf{u} \end{cases}$$

(63)

12.2. Sistemas disjuntos en paralelo.

Considérese dos sistemas disjuntos en paralelo, como se muestra en la figura 18:

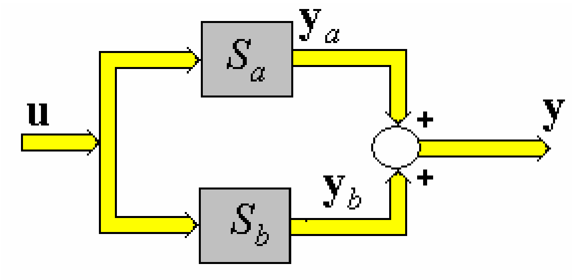


Fig.18. Sistemas en paralelo.

Para este sistema se cumplen las siguientes relaciones:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_a = \mathbf{u}_b$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_a + \mathbf{y}_b$$

El estado del sistema conjunto será la unión de los dos subsistemas:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix}$$

Sobre la base de lo anterior las ecuaciones de estado del sistema conjunto son:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} d\mathbf{x}_a/dt \\ d\mathbf{x}_b/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_a & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_a \\ \mathbf{B}_b \end{bmatrix} \mathbf{u} \\ \\ \mathbf{y} = [\mathbf{C}_a \quad \mathbf{C}_b] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix} + [\mathbf{D}_a + \mathbf{D}_b]\mathbf{u} \end{cases} \tag{64}$$

12.3. Sistema con realimentación constante de la salida.

Considérese el sistema que se muestra en la figura 19:

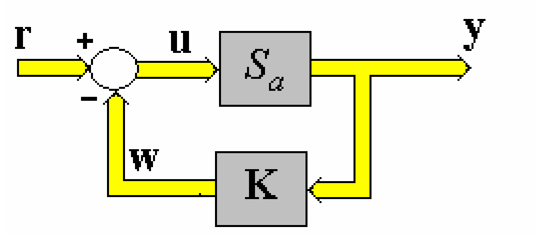


Fig.19. Realimentación constante de la salida.

El modelo de la planta (sistema sin realimentar, S_a) es:

$$Planta: \begin{cases} d\mathbf{x}/dt = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{cases}$$

Al realimentar, como se muestra en la figura 19, se cumplirá que:

$$\mathbf{w} = \mathbf{K}\,\mathbf{y}$$
$$\mathbf{u} = \mathbf{r} - \mathbf{w}$$

Sobre la base de lo anterior se obtiene:

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{D}(\mathbf{r} - \mathbf{w}) = \mathbf{Cx} + \mathbf{Dr} - \mathbf{DK}\,\mathbf{y} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad [\mathbf{I} + \mathbf{DK}]\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Dr} \quad \Rightarrow$$

La ecuación de salida resulta:

$$\mathbf{y} = (\mathbf{I} + \mathbf{DK})^{-1}\mathbf{Cx} + (\mathbf{I} + \mathbf{DK})^{-1}\mathbf{Dr} \tag{65}$$

La ecuación de estado será, teniendo en cuenta la (65):

$$d\mathbf{x}/dt = \mathbf{Ax} + \mathbf{B}(\mathbf{r} - \mathbf{Ky}) = \mathbf{Ax} + \mathbf{Br} - \mathbf{BK}(\mathbf{I} + \mathbf{DK})^{-1}\mathbf{Cx} - \mathbf{BK}(\mathbf{I} + \mathbf{DK})^{-1}\mathbf{Dr}$$

$$d\mathbf{x}/dt = \left[\mathbf{A} - \mathbf{BK}(\mathbf{I} + \mathbf{DK})^{-1}\mathbf{C}\right]\mathbf{x} + \left[\mathbf{B} - \mathbf{BK}(\mathbf{I} + \mathbf{DK})^{-1}\mathbf{D}\right]\mathbf{r}$$

(66)

Para el caso más habitual en que la matriz $\mathbf{D}=0$, la expresión anterior se reduce a:

$$d\mathbf{x}/dt = [\mathbf{A} - \mathbf{BKC}]\mathbf{x} + \mathbf{Br}$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} \tag{67}$$

12.4. Sistema con realimentación del vector de estado.

En la figura 20 se muestra un sistema con realimentación del vector de estado:

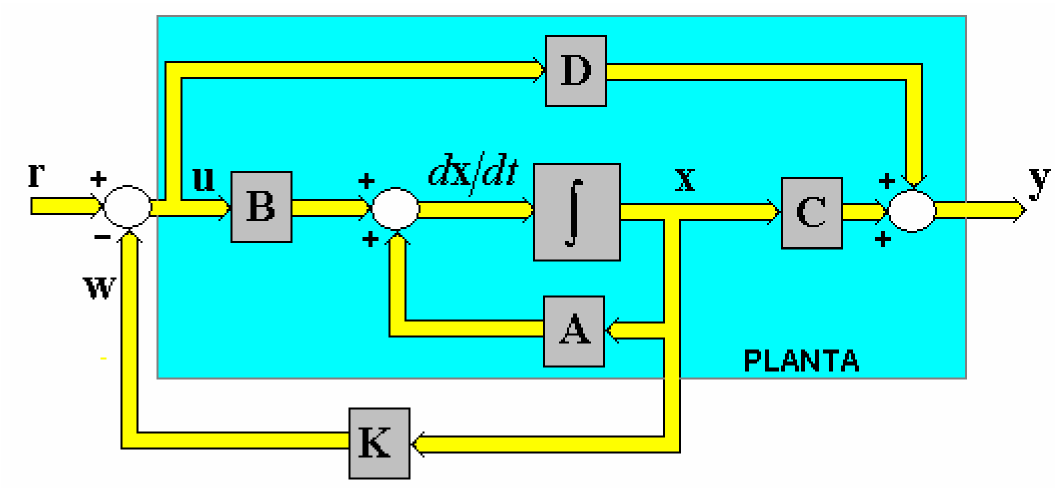


Fig.20. Realimentación del estado.

El modelo de la planta es:

$$Modelo\ de\ la\ Planta: \begin{cases} d\mathbf{x}/dt = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du} \end{cases}$$

La señal de realimentación es:

$$\mathbf{w} = \mathbf{Kx}$$

La fuerza de control es:

$$\mathbf{u} = \mathbf{r} - \mathbf{w} = \mathbf{r} - \mathbf{Kx}$$

Sobre la base de lo anterior se obtiene el modelo del sistema realimentado, sabiendo que el estado sigue siendo $\mathbf{x}$, y la entrada es $\mathbf{r}$:

$$d\mathbf{x}/dt = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}(\mathbf{r} - \mathbf{K}\mathbf{x}) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{r}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}(\mathbf{r} - \mathbf{K}\mathbf{x}) = (\mathbf{C} - \mathbf{D}\mathbf{K})\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{r}$$

(68)

Si la matriz $\mathbf{D}$ es nula, la ecuación de salida se reduce a:

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

13. Solución de la ecuación de estado para sistemas continuos y LTI.

13.1. Método de la matriz fundamental.

Si bien las ecuaciones de estado son aplicables a sistemas no–lineales y variantes en el tiempo, la solución no puede abordarse en forma general lo cuál restringe la generalidad que pretendemos darle al tema. Es por este motivo que solo abordaremos el caso de sistemas continuos y LTI ya que disponemos de la posibilidad práctica de resolución analítica del problema matemático subyacente.

Dada la ecuación de estado:

$$d\mathbf{x}/dt = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \qquad \textbf{(69)}$$

Con las condiciones iniciales:

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

La solución de (69) es:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{Bu}(\tau)d\tau \qquad \textbf{(70)}$$

La matriz $e^{\mathbf{A}t}$ se llama matriz de transición de estado, ya que transfiere el estado inicial $\mathbf{x}(0)$ al estado final $\mathbf{x}(t)$ *[esto se ve claramente si u(t)=0]* y se designa mediante la notación:

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{\Phi}(t)$$
$$e^{\mathbf{A}(t-\tau)} = \Phi(t-\tau)$$

Teniendo en cuenta esta notación, la solución de las ecuaciones de estado se puede expresar como:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{\Phi}(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \qquad \textbf{(71)}$$

Propiedades de la matriz de transición de estados.

Las propiedades más importantes de la matriz de transición de estados, son:

1. $\mathbf{\Phi}(0) = e^{\mathbf{A}\cdot 0} = \mathbf{I}$

2.

$$\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}\cdot t} = \left(e^{-\mathbf{A}\cdot t}\right)^{-1} = [\mathbf{\Phi}(-t)]^{-1} \Rightarrow \mathbf{\Phi}^{-1}(t) = \mathbf{\Phi}(-t)$$

3.

$$\mathbf{\Phi}(t_1+t_2) = e^{\mathbf{A}(t_1+t_2)} = e^{\mathbf{A}t_1}e^{\mathbf{A}t_1} = \mathbf{\Phi}(t_1)\mathbf{\Phi}(t_2) = \mathbf{\Phi}(t_2)\mathbf{\Phi}(t_1)$$

4. $[\mathbf{\Phi}(t)]^n = \mathbf{\Phi}(nt)$

5.

$$\mathbf{\Phi}(t_2 - t_1)\mathbf{\Phi}(t_1 - t_0) = \mathbf{\Phi}(t_2 - t_0) = \mathbf{\Phi}(t_1 - t_0)\mathbf{\Phi}(t_2 - t_1)$$

13.2. Método de la transformada de Laplace.

Transformando por Laplace la ecuación de estado, se obtiene:

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{X}(0) = \mathbf{AX}(s) + \mathbf{BU(s)}$$

Ordenando términos y sacando factor común, se tiene:

$$\left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)\mathbf{X}(s) = \mathbf{X}(0) + \mathbf{BU}(s)$$

Despejando $\mathbf{X}(s)$, se obtiene:

$$\mathbf{X}(s) = \left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{X}(0) + \left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{BU}(s)$$

(72)

Las variables de estado en el dominio temporal se obtienen hallando la transformada inversa de Laplace de la ecuación (72).

$$\mathbf{x}(t) = L^{-1}\left\{\left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{X}(0)\right\} + L^{-1}\left\{\left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{BU}(s)\right\}$$

(73)

Comparando las soluciones dadas por las ecuaciones (70) y (71), se obtiene que la matriz fundamental o matriz de transición se puede determinar como:

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{\Phi}(t) = L^{-1}\left(s\mathbf{I}-\mathbf{A}\right)^{-1} = I + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2t^2}{2\text{¡}} + \frac{\mathbf{A}^3t^3}{3\text{¡}} + \cdots \tag{74}$$

<u>Ejemplo 8.</u>

Sea el sistema dado por su modelo de estado:

$$\begin{bmatrix} dx_1/dt \\ dx_2/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [0]u$$

Obténgase la respuesta temporal para $u(t)$ escalón unitario, y condiciones iniciales nulas, mediante la matriz de transición de estados.

La matriz de transición de estados se puede obtener mediante:

$$\Phi(t) = e^{\mathcal{A}t} = \mathcal{L}^{-1}\left[sI - \mathcal{A}\right]^{-1} \tag{75}$$

Como:

$$\left[s\mathbf{I}-\mathbf{A}\right] = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & 1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}$$

La inversa de $\left[s\mathbf{I}-\mathbf{A}\right]$ se obtiene mediante:

$$\left[s\mathbf{I}-\mathbf{A}\right]^{1}=\frac{1}{(s+1)(s+2)}\begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \dfrac{-2}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

La matriz de transición de estados según la ecuación (75), es:

$$\mathbf{\Phi}(t)=L^{-1}\begin{bmatrix} \dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \dfrac{-2}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} 2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t} \\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+e^{-2t} \end{bmatrix}$$

El vector de estado **en función del tiempo, se puede obtener mediante la ecuación (71):**

$$\mathbf{x}(t)=e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0)+\int_0^t\begin{bmatrix} 2e^{-(t-\tau)}-e^{-2(t-\tau)} & e^{-(t-\tau)}-e^{-2(t-\tau)} \\ -2e^{-(t-\tau)}+2e^{-2(t-\tau)} & -e^{-(t-\tau)}+e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}[1]\,d\tau$$

O bien mediante la aplicación de la ecuación (73), teniendo en cuenta que *el estado inicial es cero, se obtiene*:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2} e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix}$$

La salida del sistema es:

$$y(t) = x_1(t) = \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2} e^{-2t}$$

El diagrama en bloques del sistema del ejemplo 8, se muestra en la figura 21(puede servir, por ej., para realizar la simulación dinámica con Simulink)

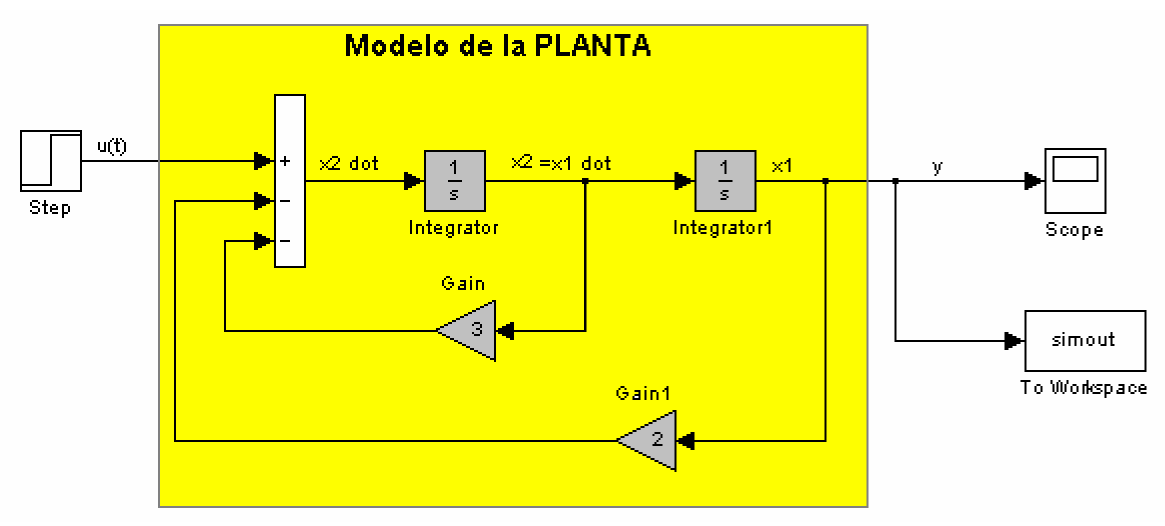


Fig. 21. Diagrama en bloques para el Ejemplo 8.

En la figura 22 se muestra la respuesta dinámica del sistema del Ejemplo 8 frente a un escalón unitario de entrada y con condiciones iniciales nulas.

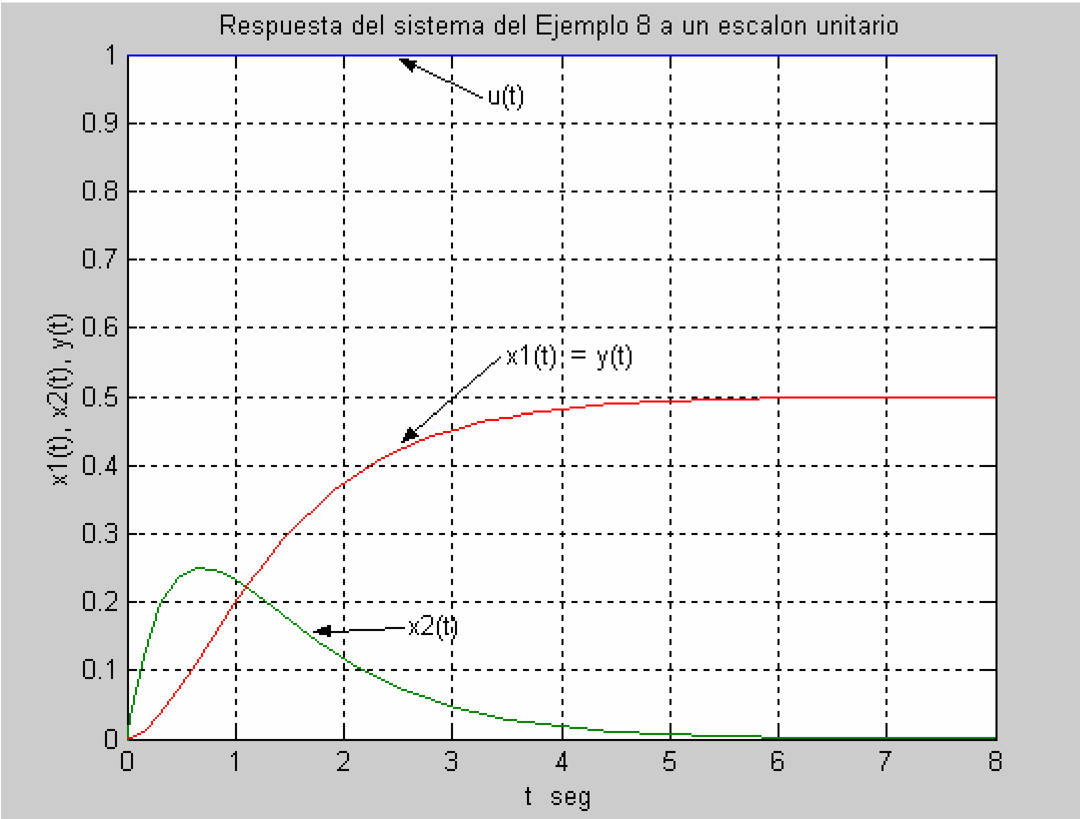


Fig. 22. Respuesta dinámica del problema del ejemplo 8.