

Guía de ondas rectangular

1.- Introducción General

Se trata de resolver las ecuaciones de Maxwell en un medio isótropo y homogéneo libre de cargas y de corrientes, con conductividad nula, sin pérdidas óhmicas y cuyas constantes son: μ y ϵ . Está limitado por 4 superficies conductoras de muy alta conductividad ($\sigma \rightarrow \infty$) separadas por distancias a y b en las coordenadas cartesianas x e y respectivamente. Asumimos que dichas superficies tienen longitud infinita en la dirección z .

Suponemos que los campos varían con el tiempo en régimen senoidal permanente (recordar que entonces $\frac{\partial}{\partial t} = j\omega$). Supondremos que la propagación es en la dirección z positiva y asumiremos para los campos una variación con z de la forma $e^{-\gamma z}$ (y por lo tanto $\frac{\partial}{\partial z} = -\gamma$).

Teniendo en cuenta que el medio es isótropo y homogéneo y que los campos varían en el tiempo en régimen senoidal permanente, las ecuaciones de Maxwell con rotor desarrolladas adoptan la forma:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\mu j\omega H_x \quad (1), \quad \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \epsilon j\omega E_x \quad (4),$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\mu j\omega H_y \quad (2), \quad \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \epsilon j\omega E_y \quad (5),$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\mu j\omega H_z \quad (3), \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \epsilon j\omega E_z \quad (6),$$

Teniendo en cuenta la variación de los campos con la coordenada z , podemos reemplazar las derivadas parciales con respecto a z en las ecuaciones anteriores, con lo que las ecuaciones 1, 2, 4, y 5 quedan así:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} + \gamma E_y = -j\mu\omega H_x \quad (1'), \quad \frac{\partial H_z}{\partial y} + \gamma H_y = j\epsilon\omega E_x \quad (4'),$$

$$\gamma E_x + \frac{\partial E_z}{\partial x} = j\mu\omega H_y \quad (2'), \quad -\gamma H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} = j\epsilon\omega E_y \quad (5'),$$

Ahora se trata de obtener expresiones para las componentes de los campos E_x , E_y , H_x y H_y en función de E_z y H_z o sus derivadas parciales, por lo tanto pueden combinarse las ecuaciones (1') y (5') para obtener las dos primeras fórmulas operando de la siguiente manera. Despejamos E_y de la ecuación (1')

$$E_y = -\frac{j\mu\omega}{\gamma}H_x - \frac{1}{\gamma}\frac{\partial E_z}{\partial y} \quad (7),$$

y la reemplazamos en la ecuación (5') que queda:

$$-\gamma H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} = j\epsilon\omega\left[-\frac{1}{\gamma}\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{j\mu\omega}{\gamma}H_x\right] = \frac{\mu\epsilon\omega^2}{\gamma}H_x - \frac{j\epsilon\omega}{\gamma}\frac{\partial E_z}{\partial y},$$

Pasando el término que contiene H_x al primer miembro, sacando factor común (multiplicando previamente por $-\gamma$) y el término $\frac{\partial H_z}{\partial x}$ al miembro de la derecha, podemos despejar H_x quedando:

$$H_x = \frac{j\epsilon\omega}{h^2}\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\gamma}{h^2}\frac{\partial H_z}{\partial x},$$

$$\text{Donde hemos llamado} \quad h^2 = \gamma^2 + \mu\epsilon\omega^2.$$

Ahora reemplazamos la expresión de H_x en la ecuación (7) para obtener E_y ,

$$E_y = -\frac{j\mu\omega}{\gamma}\left[-\frac{\gamma}{h^2}\frac{\partial H_z}{\partial x} + \frac{j\epsilon\omega}{h^2}\frac{\partial E_z}{\partial y}\right] - \frac{1}{\gamma}\frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{j\mu\omega}{h^2}\frac{\partial H_z}{\partial x} + \left[\frac{\mu\epsilon\omega^2}{\gamma h^2} - \frac{1}{\gamma}\right]\frac{\partial E_z}{\partial y}$$

Operando en la expresión entre corchetes finalmente se obtiene:

$$E_y = \frac{j\mu\omega}{h^2}\frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{\gamma}{h^2}\frac{\partial E_z}{\partial y}.$$

Para hallar las componentes restantes se opera de forma similar pero con las ecuaciones (2') y (4'). De la ecuación (4') despejamos H_y para obtener la ecuación:

$$H_y = \frac{j\epsilon\omega}{\gamma}E_x - \frac{1}{\gamma}\frac{\partial H_z}{\partial y} \quad (8),$$

que reemplazándola en la ecuación (2') ésta queda:

$$\gamma E_x + \frac{\partial E_z}{\partial x} = j\mu\omega \left[-\frac{1}{\gamma} \frac{\partial H_z}{\partial y} + \frac{j\epsilon\omega}{\gamma} E_x \right] = -\frac{\mu\epsilon\omega^2}{\gamma} E_x - \frac{j\mu\omega}{\gamma} \frac{\partial H_z}{\partial y},$$

Pasando el término que contiene E_x al primer miembro, sacando factor común (multiplicando previamente por γ) y el término $\frac{\partial E_z}{\partial x}$ al miembro de la derecha podemos despejar E_x quedando:

$$E_x = -\frac{j\mu\omega}{h^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\gamma}{h^2} \frac{\partial E_z}{\partial x},$$

$$\text{De nuevo hemos llamado} \quad h^2 = \gamma^2 + \mu\epsilon\omega^2.$$

Ahora reemplazamos la expresión de E_x en la ecuación (8) para obtener H_y ,

$$H_y = \frac{j\epsilon\omega}{\gamma} \left[-\frac{\gamma}{h^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{j\mu\omega}{h^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} \right] - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial H_z}{\partial y} = -\frac{j\epsilon\omega}{h^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} + \left[\frac{\mu\epsilon\omega^2}{\gamma h^2} - \frac{1}{\gamma} \right] \frac{\partial E_z}{\partial y}$$

Operando en la expresión entre corchetes finalmente se obtiene:

$$H_y = -\frac{j\epsilon\omega}{h^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\gamma}{h^2} \frac{\partial H_z}{\partial y}.$$

En resumen, hemos logrado escribir las componentes E_x , E_y , H_x y H_y en función de las derivadas parciales de E_z y H_z respecto de x y de y , que por completitud las volvemos a escribir aca:

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{j\mu\omega}{h^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\gamma}{h^2} \frac{\partial E_z}{\partial x}, & E_y &= \frac{j\mu\omega}{h^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{\gamma}{h^2} \frac{\partial E_z}{\partial y}, \\ H_x &= \frac{j\epsilon\omega}{h^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\gamma}{h^2} \frac{\partial H_z}{\partial x}, & H_y &= -\frac{j\epsilon\omega}{h^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\gamma}{h^2} \frac{\partial H_z}{\partial y}. \end{aligned}$$

2.- Ondas guiadas entre planos paralelos

A partir de las ecuaciones anteriores se puede resolver un problema más simple donde se pueden fijar las ideas más importantes concernientes a este tema: Supongamos que tenemos dos planos paralelos infinitamente anchos (en la dirección y , es decir $b \rightarrow \infty$). En ese caso hay simetría en el eje y y por lo tanto la solución no puede depender de la variable y de manera que $\frac{\partial}{\partial y} = 0$. En ese caso las ecuaciones de las componentes de los campos se reducen apreciablemente y son más fáciles de resolver, quedando:

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\gamma}{h^2} \frac{\partial E_z}{\partial x}, & E_y &= \frac{j\mu\omega}{h^2} \frac{\partial H_z}{\partial x}, \\ H_x &= -\frac{\gamma}{h^2} \frac{\partial H_z}{\partial x}, & H_y &= -\frac{j\epsilon\omega}{h^2} \frac{\partial E_z}{\partial x}. \end{aligned}$$

Aclararemos ahora el porque de la obtención de las ecuaciones de las componentes de los campos en función de las componentes E_z y H_z .

2.A CAMPOS TRANSVERSALES ELECTRICOS

Si hacemos $E_z = 0$, el campo eléctrico no tendrá componente en la dirección de propagación, será enteramente TRANSVERSAL, es decir tendrá únicamente componentes en direcciones perpendiculares a la dirección de propagación. No podemos hacer simultáneamente $H_z = 0$ porque entonces, todas las componentes se anulan y esa solución (trivial) no sirve. Así que si hacemos $E_z = 0$ en las ecuaciones anteriores se tiene:

$$\begin{aligned} E_x &= 0, & E_y &= \frac{j\mu\omega}{h^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} (9), \\ H_x &= -\frac{\gamma}{h^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} (10), & H_y &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto si podemos hallar una solución para H_z (o para alguna de las componentes anteriores E_y o H_x) tenemos resuelto el problema. Conviene obtener la solución para E_y porque es más fácil aplicarle las condiciones de contorno y luego hallar H_z y H_x . Para hallar una solución de E_y uso la ecuación de ondas que como ya sabemos vale para cualquier componente de campo eléctrico o magnético:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} + \mu\epsilon\omega^2 E_y = 0,$$

teniendo en cuenta que $\frac{\partial}{\partial y} = 0$ y que $\frac{\partial^2}{\partial z^2} = \gamma^2$, la ecuación de ondas queda:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \gamma^2 E_y + \mu\epsilon\omega^2 E_y = \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + h^2 E_y = 0,$$

cuyas soluciones (se puede demostrar que son soluciones, simplemente reemplazando en la ecuación de ondas) son:

$$E_y = C_1 \text{sen}(hx) + C_2 \cos(hx),$$

Las constantes C_1 , C_2 y h se obtienen al aplicar las condiciones de contorno, y como E_y es tangencial sobre la superficie de los dos planos (recordar que son conductores perfectos) debe anularse y por lo tanto esas condiciones se pueden expresar matemáticamente así:

$$E_y(x=0) = C_1 \text{sen}(h0) + C_2 \cos(h0) = C_2 = 0, \text{ (plano inferior)}$$

$$E_y(x=a) = C_1 \text{sen}(ha) = 0 \text{ (plano superior),}$$

de la segunda ecuación se deduce que:

$$ha = m\pi \rightarrow h = \frac{m\pi}{a}, \text{ siendo } m=1,2,3,\dots \text{ (entero positivo),}$$

por lo tanto la componente E_y es:

$$E_y = C_1 \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right) e^{j\omega t - \gamma z},$$

que reemplazada en la ecuación (9) permite hallar H_z simplemente pasando al miembro de la derecha el factor $\frac{j\mu\omega}{h^2}$ e integrando:

$$H_z = \frac{h^2}{j\mu\omega} \int E_y dx = \frac{h^2}{j\mu\omega} \int C_1 \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right) e^{j\omega t - \gamma z} dx =$$

$$C_1 \frac{-j(m\pi)^2}{a^2 \mu \omega} \frac{(-\cos(\frac{m\pi}{a}x))}{\frac{m\pi}{a}} e^{j\omega t - \gamma z},$$

donde hemos escrito explícitamente el valor de h . Simplificando y reagrupando, finalmente la expresión para H_z es:

$$H_z = \frac{j m \pi}{a \mu \omega} C_1 \cos\left(\frac{m \pi}{a} x\right) e^{j \omega t - \gamma z}.$$

Derivando respecto de x esta expresión, y teniendo en cuenta la ecuación (10) obtenemos H_x :

$$H_x = \frac{j \gamma}{\mu \omega} C_1 \sin\left(\frac{m \pi}{a} x\right) e^{j \omega t - \gamma z}.$$

Al obtener la estructura de los campos hemos determinado h y por lo tanto podemos hallar γ que es el factor que determina las características de la propagación.

$$h^2 = \left(\frac{m \pi}{a}\right)^2 = \mu \epsilon \omega^2 + \gamma^2,$$

y luego:

$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{m \pi}{a}\right)^2 - \mu \epsilon \omega^2}.$$

Si analizamos el exponente de las componentes de los campos $e^{j \omega t - \gamma z}$ vemos que para que HAYA PROPAGACION $\gamma = \alpha + j \beta$ debe ser un complejo imaginario puro ($\alpha = 0$), para que de esa forma al reemplazar en el exponente quede $e^{j(\omega t - \beta z)}$. De lo contrario si fuera un número real ($\beta = 0$) no tendríamos propagación SOLO ATENUACION ya que el exponente sería $e^{-\alpha z} e^{j \omega t}$. Por lo tanto NO TODOS LOS VALORES DE m HACEN QUE SEA POSIBLE LA PROPAGACION, dado que fijadas las constantes del medio, la distancia a entre los planos conductores y la frecuencia, es el valor de m el que determina si γ es real o imaginario.

Si exigimos que γ se anule se obtiene una expresión que permite determinar la denominada frecuencia de corte ($\omega_c = 2\pi f_c$) (justamente la frecuencia que anula γ):

$$\gamma = 0 \implies \left(\frac{m \pi}{a}\right)^2 = \mu \epsilon \omega_c^2,$$

y por lo tanto

$$f_{c_m} = \frac{m}{2a\sqrt{\mu\epsilon}}.$$

Para cada valor de m hay un MODO de PROPAGACION, y en particular en este caso (transverso eléctrico) se denominan MODOS TRANSVERSALES ELECTRICOS TE_m . Claramente NO todos los modos van a propagar a una cierta frecuencia, sino que por el contrario, con las características del medio y la frecuencia que se desea propagar se determina la geometría (es decir el valor de a) para que un modo (o modos) propaguen a esa frecuencia. Es sencillo ver que para que haya propagación la frecuencia de transmisión debe ser mayor que la frecuencia de corte ($f > f_{c_m}$) de modo que en ese caso el factor de propagación γ es imaginario puro ($\gamma = j\beta$) y por lo tanto:

$$\beta = \sqrt{\mu\epsilon\omega^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2}.$$

Supongamos ahora que en general los campos propagan a la frecuencia f (o sea $\gamma = j\beta$), finalmente entonces la estructura de los mismos (la solución del problema) será:

MODOS TE_m

$$E_y = C_1 \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right)e^{j(\omega t - \beta z)},$$

$$H_z = \frac{j m \pi}{a \mu \omega} C_1 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)e^{j(\omega t - \beta z)},$$

$$H_x = -\frac{\beta}{\mu \omega} C_1 \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right)e^{j(\omega t - \beta z)}.$$

2.-B CAMPOS TRANSVERSALES MAGNETICOS

Para determinar la estructura de los campos electromagnéticos de los modos transversos magnéticos, solamente tenemos que hacer $H_z = 0$ en el conjunto de 4 ecuaciones al principio de la página 4 (ver 2.-Ondas). En ese caso estas ecuaciones quedan:

$$E_x = -\frac{\gamma}{h^2} \frac{\partial E_z}{\partial x}, \quad (11) \quad E_y = 0,$$

$$H_x = 0, \quad H_y = -\frac{j\epsilon\omega}{h^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad (12) .$$

Como antes, si podemos determinar alguna de estas tres componentes el problema estará resuelto. Si bien E_z es tangencial en ambas caras y podría usarse para la solución del problema, preferimos obtener primero H_y a partir de la ecuación de ondas, luego obtener E_z y aplicarle a esta componente las condiciones de contorno. La ecuación de ondas para H_y (teniendo en cuenta las mismas restricciones respecto de las derivadas respecto de z y de y) es:

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + \gamma^2 + \mu\epsilon\omega^2 H_y = \frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + h^2 H_y = 0,$$

cuya solución es (como antes):

$$H_y = C_3 \sin(hx) + C_4 \cos(hx),$$

ahora obtenemos la componente E_z a partir de la ecuación (12), que queda:

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{jh^2}{\epsilon\omega} \int H_y dx = \frac{jh^2}{\epsilon\omega} \int [C_3 \sin(hx) + C_4 \cos(hx)] dx = \\ &= \frac{jh^2}{\epsilon\omega} \left[-\frac{C_3}{h} \cos(hx) + \frac{C_4}{h} \sin(hx) \right] = \frac{jh}{\epsilon\omega} [C_4 \sin(hx) - C_3 \cos(hx)], \end{aligned}$$

la aplicación de las condiciones de contorno nos da:

$$E_z(x=0) = \frac{jh}{\epsilon\omega} [C_4 \sin(h0) + C_3 \cos(h0)] = 0 = C_3 \frac{jh}{\epsilon\omega}, \quad (\text{plano inferior})$$

la única constante que puede ser nula es C_3 por lo tanto la solución parcialmente es:

$$E_z = \frac{j\hbar}{\epsilon\omega} C_4 \text{sen}(hx),$$

la aplicación de la segunda condición de contorno nos da:

$$E_z(x = a) = \frac{j\hbar}{\epsilon\omega} C_4 \text{sen}(ha) = 0 \text{ (plano superior)}$$

que igual que antes determina que $h = \frac{m\pi}{a}$, con $m=0,1,2,3,\dots$ (entero positivo o 0)

por lo que la solución para E_z es:

$$E_z = \frac{j m \pi}{a \epsilon \omega} C_4 \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a} x\right) e^{(j\omega t - \gamma z)}.$$

Determinar ahora H_y es trivial, dado que sólo tenemos que reemplazar el valor de h y poner la constante C_4 , entonces:

$$H_y = C_4 \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right).$$

Para determinar E_x recurrimos a la ecuación (11):

$$E_x = \frac{-\gamma}{h^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} = \left[\frac{-\gamma}{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2} \right] \frac{j m \pi}{a \epsilon \omega} \left(\frac{m\pi}{a}\right) C_4 \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) e^{(j\omega t - \gamma z)},$$

simplificando y agrupando convenientemente las constantes finalmente queda:

$$E_x = \frac{-j\gamma}{\epsilon\omega} C_4 \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) e^{(j\omega t - \gamma z)}.$$

Si suponemos como antes que hay propagación (es decir los valores de m son tales que $\gamma = j\beta$) finalmente los campos adquieren la forma siguiente:

$$E_x = \frac{\beta}{\epsilon\omega} C_4 \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) e^{j(\omega t - \beta z)},$$

$$E_z = \frac{j m \pi}{a \epsilon \omega} C_4 \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a} x\right) e^{j(\omega t - \beta z)},$$

$$H_y = C_4 \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) e^{j(\omega t - \beta z)}.$$

2.-C CAMPOS TRANSVERSO ELECTROMAGNETICOS

Una cuestión que no discutimos hasta ahora es el hecho de que cuando calculamos h , tanto en el modo TM dejamos explícitamente $m = 0$ como un posible valor de m . Puede verse que si reemplazamos $m = 0$ en las expresiones de los campos TE, todas las componentes se anulan. No es este el caso para los modos TM dado que sólo se anula la componente E_z y por eso, ese modo particular $TM_{m=0}$ se denomina transverso electromagnético TEM dado que no sólo H_z es nula sino también E_z y por lo tanto el campo es enteramente transversal. Sin embargo este modo ya lo conocemos pues representa las ondas planas en un medio ilimitado sin pérdidas. Pero además este modo ratifica la posibilidad de propagarlo en líneas de transmisión (de hecho, en el límite, dos planos paralelos de ancho infinito pueden constituir una línea microtiras por ejemplo). Veamos la estructura de los campos para este modo *TEM* ($m = 0$) :

$$E_x = \frac{\beta}{\epsilon\omega} C_4 e^{j(\omega t - \beta z)}, \quad H_y = C_4 e^{j(\omega t - \beta z)}.$$

En particular si hacemos el cociente entre las amplitudes del campo eléctrico al campo magnético se tiene:

$$\frac{E_x}{H_y} = \frac{C_4 \frac{\beta}{\epsilon\omega}}{C_4} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}},$$

que es la impedancia intrínseca para una onda plana que se propaga en un medio sin pérdidas. Para deducir la expresión anterior, también tuvimos en cuenta que si $m = 0$ la constante de propagación $\gamma = \alpha + j\beta$ tiene $\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$ como se puede ver a continuación:

$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \mu\epsilon\omega^2} = \sqrt{-\mu\epsilon\omega^2} = j\omega\sqrt{\mu\epsilon} = j\beta$$

2.-D CAMPOS TRANSVERSO MAGNETICO Y TRANSVERSO ELECTRICO EN GUIAONDAS

Ahora intentaremos resolver el problema general de hallar la estructura de los campos electromagnéticos en guía ondas rectangulares (o cuadradas como caso particular). Para eso volvemos a escribir las ecuaciones deducidas al final de la página 3 (ver 1.- Introducción).

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{j\mu\omega}{h^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\gamma}{h^2} \frac{\partial E_z}{\partial x}, & E_y &= \frac{j\mu\omega}{h^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{\gamma}{h^2} \frac{\partial E_z}{\partial y}, \\ H_x &= \frac{j\epsilon\omega}{h^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\gamma}{h^2} \frac{\partial H_z}{\partial x}, & H_y &= -\frac{j\epsilon\omega}{h^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\gamma}{h^2} \frac{\partial H_z}{\partial y}. \end{aligned}$$

2-D₁ Modos Transversales Magnéticos ($TM_{m,n}$)

Comenzamos por calcular la estructura de los campos electromagnéticos para el modo $TM(H_z = 0)$ sólo por conveniencia. En líneas generales se siguen los mismos procedimientos y pasos que en el caso de ondas guiadas entre planos paralelos, excepto que las expresiones son un poco más complicadas, porque hay dependencia en y lo que conlleva a que para resolver la ecuación de ondas haya que hacer una doble integración y para calcular las constantes hace falta aplicar 4 condiciones de contorno y por eso aparecerán modos asociados con el entero n (ver arriba en el título).

Comenzamos por hacer $H_z = 0$ en las ecuaciones anteriores, que quedan:

$$E_x = -\frac{\gamma}{h^2} \frac{\partial E_z}{\partial x}, \quad (13)$$

$$E_y = -\frac{\gamma}{h^2} \frac{\partial E_z}{\partial y}, \quad (14)$$

$$H_x = \frac{j\epsilon\omega}{h^2} \frac{\partial E_z}{\partial y}, \quad (15)$$

$$H_y = -\frac{j\epsilon\omega}{h^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad (16).$$

Notemos ahora que las soluciones de los campos serán funciones que dependerán de las cuatro variables: x, y, z , y t , por lo tanto escribamos por ejemplo la componente E_z .

$$E_z = X(x)Y(y)e^{j\omega t}e^{-\gamma z},$$

donde es importante observar lo siguiente:

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial x} Y(y) e^{j\omega t} e^{-\gamma z}$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} Y(y) e^{j\omega t} e^{-\gamma z}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial y} X(x) e^{j\omega t} e^{-\gamma z}$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} X(x) e^{j\omega t} e^{-\gamma z},$$

con lo cual, cuando reemplazamos E_z en la ecuación de ondas, ésta queda así:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + \mu\epsilon\omega^2 E_z = 0 =$$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} Y(y) e^{j\omega t} e^{-\gamma z} + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} X(x) e^{j\omega t} e^{-\gamma z} + \gamma^2 X(x) Y(y) e^{j\omega t} e^{-\gamma z} + \mu\epsilon\omega^2 X(x) Y(y) e^{j\omega t} e^{-\gamma z},$$

llamando $h^2 = \gamma^2 + \mu\epsilon\omega^2$ (†) y simplificando los términos exponenciales (que nunca pueden valer cero) se obtiene una versión simplificada para la ecuación de ondas:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} Y(y) + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} X(x) + h^2 X(x) Y(y) = 0$$

si dividimos cada miembro por $X(x)Y(y)$, que nunca pueden ser cero individualmente se tiene:

$$\frac{\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}}{X(x)} + \frac{\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}}{Y(y)} + h^2 = 0, \quad \text{o bien} \quad \frac{\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}}{X(x)} + h^2 = -\frac{\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}}{Y(y)}$$

De esa manera en el miembro de la izquierda tenemos la variación con x y en el de la derecha la variación con y , por lo tanto, supongamos que x adopta un valor determinado (digamos $x = 1$), el miembro de la izquierda (después de reemplazar $x = 1$ en la función $X(x)$ (no importa que no la conozcamos), en $\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}$, hacer el cociente y sumarle h^2 , tomará un valor perfectamente determinado (digamos 3.45), por lo tanto el miembro de la derecha PARA TODO VALOR de y DEBE VALER 3.45 y así el miembro de la derecha tiene que ser IGUAL A UNA CONSTANTE (digamos 3.45). De la misma manera podemos invertir el argumento y suponer ahora que y adopta un valor determinado (digamos $y = -3$) si lo reemplazamos en $\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}$ (no importa que no la conozcamos) y en $Y(y)$ y hacemos el cociente, el miembro de la derecha tomará un valor perfectamente determinado (digamos 23.89), y por lo tanto entonces el miembro de la izquierda PARA TODO VALOR DE x DEBE SER UNA CONSTANTE (digamos 23.89). En definitiva podemos escribir:

$$\frac{\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}}{X(x)} + h^2 = A^2 = -\frac{\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}}{Y(y)}, \quad \text{llamando} \quad \frac{\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}}{X(x)} = -B^2 \quad (*),$$

$$\text{y teniendo en cuenta que } \frac{\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}}{Y(y)} = -A^2 \quad (**),$$

$$\text{está claro que } -B^2 + h^2 = A^2 \implies h^2 = A^2 + B^2.$$

A partir de la ecuación (*) pasando $X(x)$ al otro miembro y luego el término $-B^2 X(x)$ al primer miembro obtenemos la ecuación de ondas para $X(x)$:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} X(x) + B^2 X(x) = 0,$$

de la cual una solución es:

$$X(x) = C_1 \text{sen}(Bx) + C_2 \cos(Bx) \quad \text{si se cumple que} \quad -B^2 + h^2 = A^2 = \text{cte.}$$

lo cual puede comprobarse reemplazando la solución directamente en la ecuación de ondas. La solución para la ecuación de ondas de $Y(y)$ (que se obtiene de (**)) operando de forma totalmente similar con A^2 e $Y(y)$ a como se hizo con B^2 y $X(x)$), que también puede comprobarse por reemplazo directo en la ecuación de ondas para $Y(y)$, es de la forma:

$$Y(y) = C_3 \text{sen}(Ay) + C_4 \cos(Ay) \quad \text{si se cumple que} \quad A^2 + B^2 = h^2,$$

con lo cual la solución para E_z es:

$$E_z = [C_1 \text{sen}(Bx) + C_2 \cos(Bx)][C_3 \text{sen}(Ay) + C_4 \cos(Ay)]e^{-\gamma z} e^{j\omega t},$$

con la condición adicional $A^2 + B^2 = h^2$.

Ahora simplemente es cuestión de aplicar las condiciones de contorno para hallar los valores de las constantes C_i (con $i = 1, 2, 3, 4$) y h . Como E_z es tangencial en todas las caras de la guía debe ser nula en todas ellas lo que matemáticamente se expresa así:

$$E_z(x = 0, y) = 0 = C_2[C_3 \text{sen}(Ay) + C_4 \cos(Ay)]e^{-\gamma z} e^{j\omega t} \quad \text{que se verifica haciendo } C_2 = 0,$$

$E_z(x = a, y) = 0 = C_1 \text{sen}(Ba)[C_3 \text{sen}(Ay) + C_4 \text{cos}(Ay)]e^{-\gamma z} e^{j\omega t} = 0$ que se verifica si $Ba = m\pi$ y por lo tanto $B = \frac{m\pi}{a}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ (entero positivo)

ahora las condiciones de contorno en los dos planos restantes son:

$E_z(x, y = 0) = 0 = C_1 \text{sen}(\frac{m\pi}{a}x)C_4 e^{-\gamma z} e^{j\omega t}$ y por lo tanto tomando $C_4 = 0$ se verifica,

finalmente la última condición de contorno es:

$E_z(x, y = b) = 0 = C_1 \text{sen}(\frac{m\pi}{a}x)C_3 \text{sen}(Ab)e^{-\gamma z} e^{j\omega t}$ que se verifica si $Ab = n\pi$, $n = 1, 2, 3, \dots$

y por lo tanto:

$$A = \frac{n\pi}{b} \quad \text{y entonces} \quad h^2 = A^2 + B^2 = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2.$$

Finalmente la solución buscada para la componente E_z es:

$$E_z = C_1 C_3 \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b}x\right) e^{-\gamma z} e^{j\omega t}$$

$$h = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}, \quad m = 1, 2, 3, \dots; \quad n = 1, 2, 3, \dots, \text{ enteros positivos.}$$

Para hallar las restantes componentes sólo debemos derivar E_z respecto de x y/o de y , reemplazar en las ecuaciones (13), (14), (15), y (16) y reagrupar algunos términos, además de llamar a los productos de constantes como otra constante (por ejemplo $C_1 C_3 = C$). Antes de obtener las expresiones definitivas de las componentes de los campos conviene discutir la expresión de h y la obtención de la constante de propagación γ .

$$\text{dado que } h = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}, \quad m = 1, 2, 3, \dots; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

teniendo en cuenta la expresión † se obtiene:

$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \mu\epsilon\omega^2}.$$

Acá valen las mismas consideraciones que hicimos en la página 7, donde discutimos la posibilidad para que $\gamma = \alpha + j\beta$ sea real o imaginario puro, con la única diferencia que tenemos 2 conjuntos de números enteros, los "m" y los "n", pero la argumentación no cambia en absoluto, o sea, para que haya propagación γ debe ser imaginario puro. Si γ es real no hay propagación y sólo tendremos atenuación de los campos. El caso particular $\gamma = 0$ simplemente genera una expresión diferente para la frecuencia de corte (que es un poco más complicada y generalmente más difícil de tratar matemáticamente):

$$f_{c_{m,n}} = \frac{\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}}.$$

Finalmente y asumiendo propagación a una frecuencia mayor que la frecuencia de corte ($\omega > \omega_c$) y que por lo tanto $\gamma = j\beta$ las expresiones de los campos para el modo $TM_{m,n}$ son:

$$E_x = -\frac{\gamma}{h^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{j\beta}{h^2} \left[\frac{m\pi}{a}\right] C \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{j(\omega t - \beta z)},$$

$$E_y = -\frac{\gamma}{h^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} = -\frac{j\beta}{h^2} \left[\frac{n\pi}{b}\right] C \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{j(\omega t - \beta z)},$$

$$H_x = \frac{j\epsilon\omega}{h^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{j\epsilon\omega}{h^2} \left[\frac{n\pi}{b}\right] C \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{j(\omega t - \beta z)},$$

$$H_y = -\frac{j\epsilon\omega}{h^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{j\epsilon\omega}{h^2} \left[\frac{m\pi}{a}\right] C \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{j(\omega t - \beta z)},$$

$$h = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \quad \beta = \sqrt{\mu\epsilon\omega^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}.$$

2-D₂ Modos Transversos Eléctricos

Comenzamos por hacer $E_z = 0$ en las ecuaciones que figuran al principio de la página 11. Al reemplazar $E_z = 0$ quedan así:

$$E_x = -\frac{j\mu\omega}{h^2} \frac{\partial H_z}{\partial y}, \quad (17)$$

$$E_y = \frac{j\mu\omega}{h^2} \frac{\partial H_z}{\partial x}, \quad (18)$$

$$H_x = -\frac{\gamma}{h^2} \frac{\partial H_z}{\partial x}, \quad (19)$$

$$H_y = -\frac{\gamma}{h^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} \quad (20).$$

Acá conviene tratar de hallar una solución para H_z (dado que como se deduce de la ecuación de ondas, ésta será similar (pero no igual) a la ecuación de ondas para E_z (suponiendo la misma dependencia funcional para H_z que para E_z). Por otra parte como H_z es una componente de campo magnético tangencial en las 4 superficies conductoras de la guía NO es adecuada para aplicarle las condiciones de contorno. Obtenida la componente H_z , se calculan luego las componentes E_x y E_y a las cuales SI se le pueden aplicar las condiciones de contorno. Como son componentes tangenciales de campo eléctrico, en las adecuadas superficies de la guía deben anularse. Planteemos el tipo de dependencia funcional para H_z ,

$$H_z = X(x)Y(y)e^{j\omega t}e^{-\gamma z},$$

igual que antes (para el caso $TM_{m,n}$ lo hicimos para E_z) observar lo siguiente:

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial x} Y(y) e^{j\omega t} e^{-\gamma z}$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} Y(y) e^{j\omega t} e^{-\gamma z}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial y} X(x) e^{j\omega t} e^{-\gamma z}$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} X(x) e^{j\omega t} e^{-\gamma z},$$

con lo cual cuando reemplazamos H_z en la ecuación de ondas, ésta queda así (idéntico al caso TM):

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} + \mu\epsilon\omega^2 H_z = 0 =.$$

Desde acá se siguen exactamente los mismos pasos que para el caso TM

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} Y(y) e^{j\omega t} e^{-\gamma z} + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} X(x) e^{j\omega t} e^{-\gamma z} + \gamma^2 X(x) Y(y) e^{j\omega t} e^{-\gamma z} + \mu\epsilon\omega^2 X(x) Y(y) e^{j\omega t} e^{-\gamma z},$$

llamando $h^2 = \gamma^2 + \mu\epsilon\omega^2$ (†) y simplificando los términos exponenciales (que nunca pueden valer cero) se obtiene una versión simplificada para la ecuación de ondas:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} Y(y) + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} X(x) + h^2 X(x) Y(y) = 0$$

si dividimos cada miembro por $X(x)Y(y)$ que nunca pueden ser cero individualmente se tiene:

$$\frac{\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}}{X(x)} + \frac{\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}}{Y(y)} + h^2 = 0, \quad \text{o bien} \quad \frac{\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}}{X(x)} + h^2 = -\frac{\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}}{Y(y)}.$$

Aca se puede hacer exactamente la misma discusión que hicimos en el párrafo final de la página 12, y en consecuencia se plantean las mismas condiciones (como hicimos en el caso $TM_{m,n}$), es decir ambos miembros de la ecuación anterior son iguales a una constante. Trabajando de la misma forma entonces es fácil deducir que (excepto por las constantes) la solución para la dependencia con x de H_z es:

$$X(x) = D_1 \text{sen}(Bx) + D_2 \cos(Bx)$$

lo cual puede comprobarse reemplazando la solución directamente en la ecuación de ondas. La solución para la ecuación de ondas de $Y(y)$, que también puede comprobarse por reemplazo directo en la ecuación de ondas, es de la forma:

$$Y(y) = D_3 \text{sen}(Ay) + D_4 \cos(Ay) \quad \text{si se cumple que} \quad A^2 + B^2 = h^2,$$

con lo cual la solución para H_z es:

$$H_z = [D_1 \text{sen}(Bx) + D_2 \cos(Bx)][D_3 \text{sen}(Ay) + D_4 \cos(Ay)]e^{-\gamma z}e^{j\omega t},$$

con la condición adicional $A^2 + B^2 = h^2$.

Ahora se aplican las condiciones de contorno para hallar los valores de las constantes D_i (con $i = 1, 2, 3, 4$) y h , pero primero debemos hallar las componente E_x y E_y , dado que NINGUNA de las dos es tangencial en las 4 superficies. Para hacerlo solamente hace falta derivar H_z respecto de x y de y volviendo a las ecuaciones (17) y (18) respectivmante se tiene:

$$E_x = -\frac{j\mu\omega}{h^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} = -\frac{j\mu\omega}{h^2} A[(D_1 \text{sen}(Bx) + D_2 \cos(Bx))[D_3 \cos(Ay) - D_4 \text{sen}(Ay)],$$

$$E_y = -\frac{j\mu\omega}{h^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} = -\frac{j\mu\omega}{h^2} B[(D_1 \cos(Bx) - D_2 \sin(Bx))[D_3 \sin(Ay) + D_4 \cos(Ay)],$$

y ahora le aplico las condiciones de contorno a E_x que es tangencial solamente en las superficies $y = 0$ e $y = b$ para todo valor de x ,

$$E_x(x, y = 0) = 0 = -\frac{j\mu\omega}{h^2} A[(D_1 \sin(Bx) + D_2 \cos(Bx))[D_3] \quad \text{que se verifica haciendo } D_3 = 0,$$

$$E_x(x, y = b) = 0 = \frac{j\mu\omega}{h^2} A[(D_1 \sin(Bx) + D_2 \cos(Bx))[D_4 \sin(Ab)] \quad \text{que se verifica tomando } A = \frac{n\pi}{b} \quad n = 1, 2, 3, \dots, \text{ entero positivo}$$

aplicando condiciones de contorno a E_y que es tangencial solamente en las superficies $x = 0$ y $x = a$ para todo y ,

$$E_y(x = 0, y) = 0 = -\frac{j\mu\omega}{h^2} \left[\frac{n\pi}{b}\right] D_1 [D_4 \cos(\frac{n\pi}{b}y)] e^{-\gamma z} e^{j\omega t} \quad \text{que se verifica haciendo } D_1 = 0,$$

$$E_y(x = a, y) = 0 = \frac{j\mu\omega}{h^2} \left[\frac{n\pi}{b}\right] (-D_2) \sin(Ba) D_4 \cos(\frac{n\pi}{b}y) e^{-\gamma z} e^{j\omega t} = 0 \quad \text{que se verifica si } Ba = m\pi \text{ y por lo tanto } B = \frac{m\pi}{a}, m = 1, 2, 3, \dots \text{ (entero positivo)}$$

reemplazando las constantes en H_z y llamando $D_2 D_4 = D$:

$$H_z = D \cos(\frac{m\pi}{a}x) \cos(\frac{n\pi}{b}y) e^{-\gamma z} e^{j\omega t},$$

para obtener las demás componentes debemos derivar la expresión anterior de H_z y respecto de y para obtener E_x y H_y , respecto de x para obtener E_y y H_x y multiplicar por las constantes adecuadas en las ecuaciones (17), (18), (19) y (20). quedando finalmente:

$$E_x = \frac{j\mu\omega}{h^2} \left(\frac{n\pi}{b}\right) D [\cos(\frac{m\pi}{a}x) \sin(\frac{n\pi}{b}y)] e^{j(\omega t - \beta z)},$$

$$E_y = -\frac{j\mu\omega}{h^2} \left(\frac{m\pi}{a}\right) D [\sin(\frac{m\pi}{a}x) \cos(\frac{n\pi}{b}y) e^{j(\omega t - \beta z)}],$$

$$H_x = \frac{j\beta}{h^2} D \left(\frac{m\pi}{a}\right) [\sin(\frac{m\pi}{a}x) \cos(\frac{n\pi}{b}y)] e^{j(\omega t - \beta z)},$$

$$H_y = \frac{j\beta}{h^2} D\left(\frac{n\pi}{b}\right) \left[\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \right] e^{j(\omega t - \beta z)},$$

$$H_z = D \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{j(\omega t - \beta z)},$$

$$h = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2} \quad \beta = \sqrt{\mu\epsilon\omega^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}.$$

Obsérvese que hemos reemplazado $\gamma = j\beta$ asumiendo que hay propagación y hemos agregado la expresión completa para H_z